Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(национальный исследовательский университет)»
ИНСТИТУТ СПОРТА, ТУРИЗМА И СЕРВИСА
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

учебной дисциплины

О.1.07 МАТЕМАТИКА

для студентов специальности

13.02.13 Эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)

Челябинск 2024

ОДОБРЕНО
на заседании ЦМК
Председатель ЦМК
____________ А.И.Носачева

Протокол № 1 от 27 августа 2024 г.

Разработчик:
преподаватель Политехнического отделения Многопрофильного колледжа
__________/Н.А.Павлюкова/

Методические указания к практическим работам разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины О.1.07 Математика

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению учебной дисциплины основной профессиональной образовательной программы по специальности 13.02.13 Эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям) и овладению общими и профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
1. Практическое занятие «Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса». 8
2. Практическое занятие «Таблица часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Знаки синуса, косинуса и тангенса» 11
3. Практическое занятие «Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла» 14
4. Практическое занятие «Синус, косинус, тангенс и котангенс углов α и $-\alpha$» 19
5. Практическое занятие «Формулы сложения» 21
6. Практическое занятие «Синус, косинус, тангенс двойного угла» 26
7. Практическое занятие «Синус, косинус, тангенс половинного угла» 29
8. Практическое занятие «Формулы приведения» 33
9. Практическое занятие «Сумма и разность синусов, косинусов» 39
10. Практическое занятие «Тригонометрические уравнения» 43
11. Практическое занятие «Тригонометрические функции» 53
12. Практическое занятие «Степенная функция» 70
13. Практическое занятие «Иррациональные уравнения и неравенства» 81
14. Практическое занятие «Показательная функция» 86
15. Практическое занятие «Показательные уравнения и неравенства» 94
16. Практическое занятие «Логарифмическая функция» 102
17. Практическое занятие «Логарифмические уравнения и неравенства» 107
18. Практическое занятие «Стереометрия. Параллельность прямых и плоскостей» 114
19. Практическое занятие «Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между прямыми» 118
20. Практическое занятие «Параллельность плоскостей» 123
21. Практическое занятие «Тетраэдр и параллелепипед» 127
22. Практическое занятие «Перпендикулярность прямой и плоскости» 132
23. Практическое занятие «Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью» 135
24. Практическое занятие «Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей» 140
25. Практическое занятие «Вектор в пространстве» 144
26. Практическое занятие «Координаты в пространстве. Система координат» 148
27. Практическое занятие «Скалярное произведение векторов» 155
28. Практическое занятие «Многогранники. Призма» 160

29. Практическое занятие «Пирамида» 169
30. Практическое занятие «Тела вращения. Цилиндр» 175
31. Практическое занятие «Конус» 182
32. Практическое занятие «Сфера и шар» 189
33. Практическое занятие «Определение производной. Физический смысл производной. Правила дифференцирования» 195
34. Практическое занятие «Производная степенной функции. Производные элементарных функций» 201
35. Литература 209

ВВЕДЕНИЕ

Система среднего профессионального образования ставит перед собой задачу подготовки обучающихся к жизни в обществе, которая включает в себя формирование у них практических умений и навыков. В этом контексте особое значение приобретает преподавание учебного предмета «Математика», которое направлено на обогащение общей культуры, развивает логическое мышление и широко используются в математическом моделировании задач, с которыми встречается современный специалист в своей деятельности.

Одним из эффективных методов обучения является проведение уроков-практикумов, позволяющих студентам приобрести практические навыки и закрепить теоретические знания.

Студенты должны сформировать устойчивые навыки применения математических знаний на практике, которые они смогут применить в решении задач по специальности, а значит, в формировании профессиональной компетенций выпускника. Решение математических задач позволяет соединить теоретические знания студентов с их потребностями, даёт возможность искать пути расширения применения теоретических знаний в будущей специальности непосредственно в процессе обучения.

Цель обучения математике состоит в закладке фундаментальной математической подготовки и овладения навыками математического мышления в области будущей профессиональной деятельности, так как именно фундаментальные знания обеспечивают выпускнику возможность понимать и осваивать новую технику и технологии, новые принципы организации производства. Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

1. Владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.
2. Умение оперировать понятием функция; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами.
3. Умение оперировать понятиями стереометрии; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира.
4. Умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники.
5. Умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при

решении задач; вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы.

6. Умение оперировать понятиями векторной алгебры; находить с помощью изученных формул величину угла, расстояние между двумя точками.

7. Умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

8. Умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений.

9. Умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению учебной дисциплины «Математика» основной профессиональной образовательной программы по специальности и формированию общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения.

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях мирного и военного времени.

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности.

А также овладению профессиональными компетенциями:

ПК 3.2 Программировать электрическое и электромеханическое оборудование с автоматизированными системами управления

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса

Цель практического занятия

Научиться правильно выражать угол в градусной и радианной мерах. Знать связь радианной и градусной меры угла. Уметь откладывать углы в положительном и отрицательном направлении. Выучить новое определение тригонометрических функций.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Радианная мера угла.
2. Поворот точки вокруг начала координат.
3. Определение тригонометрических функций.

Радианная мера угла: центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.

$$\textbf{1 рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$$

Градусная мера угла	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Поворот точки вокруг начала координат: если точка A(1;0) будет двигаться по единичной окружности против часовой стрелки, то она пройдёт путь α рад от точки A(1;0) до точки B. Говорят, что точка B получена из точки A поворотом на угол α. Если точка A(1;0) будет двигаться по единичной окружности по часовой стрелке, то она пройдёт путь α рад от точки A(1;0) до точки C. Тогда говорят, что точка C получена из точки A поворотом на угол -α. При повороте на 0 рад точка остаётся на месте.

Определение тригонометрических функций:

- **Синусом угла** называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α (обозначается $\sin\alpha$).
- **Косинусом угла** называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α (обозначается $\cos\alpha$).
- **Тангенсом угла** называется отношение синуса этого угла к его косинусу (обозначается $tg\ \alpha$).
- **Котангенсом угла** называется отношение косинуса этого угла к его синусу (обозначается $ctg\ \alpha$).

Практическая часть

1. Выучите формулы и определения.
2. Изучите таблицу наиболее часто встречающихся углов в градусной и радианной мере.
3. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4733/conspect/199149/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/6019/start/199181/.

4. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4733/train/199160/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/6019/train/199191/.

5. Решите задачи:

14.1. Найдите радианную меру угла, равного:

1) $25°$; 2) $40°$; 3) $100°$; 4) $160°$; 5) $210°$; 6) $300°$.

14.2. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1{,}2\pi$; 5) 3π; 6) $2{,}5\pi$.

14.3. Заполните таблицу.

Градусная мера угла		$12°$	$36°$			$105°$	$225°$			$240°$
Радианная мера угла	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			4π	$1{,}8\pi$	

14.6. Сравните величины углов, заданных в радианах:

1) $\frac{\pi}{2}$ и $1{,}5$; 2) $-\frac{\pi}{2}$ и -2; 3) $\frac{3\pi}{2}$ и $4{,}8$.

14.7. Сравните величины углов, заданных в радианах:

1) $\frac{\pi}{4}$ и 1; 2) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{6}$.

14.8. Отметьте на единичной окружности точку, которую получим при повороте точки $P_0\,(1; 0)$ на угол:

1) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 5) $-120°$; 7) $-480°$;

2) $150°$; 4) $-45°$; 6) $450°$; 8) $-\frac{7\pi}{3}$.

14.8. Отметьте на единичной окружности точку, которую получим при повороте точки $P_0\,(1; 0)$ на угол:

1) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 5) $-120°$; 7) $-480°$;

2) $150°$; 4) $-45°$; 6) $450°$; 8) $-\frac{7\pi}{3}$.

14.9. Отметьте на единичной окружности точку, которую получим при повороте точки $P_0\,(1; 0)$ на угол:

1) $225°$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 5) $420°$; 7) $\frac{2\pi}{3}$; 9) 6π;

2) $-60°$; 4) $320°$; 6) $-315°$; 8) $-\frac{5\pi}{6}$; 10) $-720°$.

14.11. В какой четверти находится точка единичной окружности, полученная при повороте точки P_0 (1; 0) на угол:

1) $94°$; 4) $-100°$; 7) $-800°$; 10) $-\frac{7\pi}{3}$; 13) 1;

2) $176°$; 5) $-380°$; 8) $\frac{3\pi}{4}$; 11) $5{,}5\pi$; 14) -3;

3) $200°$; 6) $700°$; 9) $-\frac{3\pi}{4}$; 12) $-\frac{11\pi}{6}$; 15) 5?

14.12. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной при повороте точки P_0 (1; 0) на угол:

1) $\frac{\pi}{2}$; 3) $-90°$; 5) $\frac{5\pi}{2}$; 7) $450°$;

2) π; 4) $-180°$; 6) $-\frac{3\pi}{2}$; 8) -2π.

Контрольные вопросы:

1. Закончите предложение: «Углом в один радиан называют центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная…».
2. Чему равна градусная мера угла в 1 радиан?
3. Выразите угол 45° в радианах.
4. Выразите угол 150° в радианах.
5. Выразите угол 90° в радианах.
6. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна $\frac{\pi}{9}$.
7. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна $\frac{3\pi}{2}$.
8. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна 2π.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Таблица часто встречающихся значений тригонометрических функций.
Знаки синуса, косинуса и тангенса

Цель практического занятия

Выучить таблицу часто встречающихся значений тригонометрических функций, а также знаки синуса, косинуса и тангенса.

Методический материал

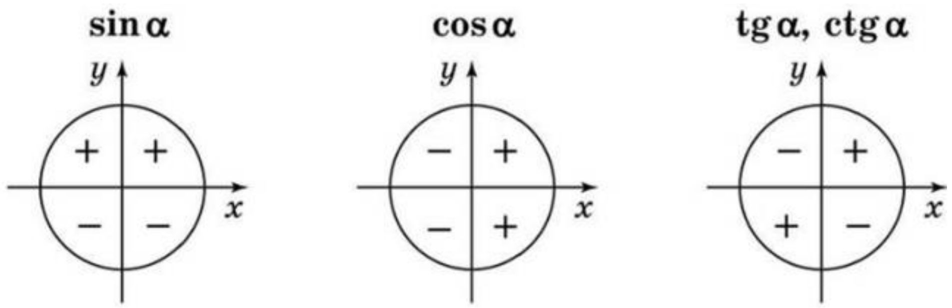
Изучаемые вопросы:

1. Таблица часто встречающихся значений тригонометрических функций.
2. Знаки синуса, косинуса и тангенса.

Приведём таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

α	0°(0 рад)	30° (π/6)	45° (π/4)	60° (π/3)	90° (π/2)	180° (π)	270° (3π/2)	360° (2π)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\varnothing$	0	$\varnothing$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\varnothing$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\varnothing$	0	$\varnothing$

Знаки тригонометрических функций по четвертям:



Практическая часть

1. Выучите таблицу часто встречающихся значений тригонометрических функций.
2. Выучите знаки синуса, косинуса и тангенса.
3. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3863/main/327035/.
4. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3863/train/327039/.
5. Решите задачи:

429 Отметить на единичной окружности точки, соответствующие числу α, если:

1) $\sin\alpha = 1$; 2) $\sin\alpha = 0$; 3) $\cos\alpha = -1$; 4) $\cos\alpha = 0$;

5) $\sin\alpha = -0{,}6$; 6) $\sin\alpha = 0{,}5$; 7) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

430 Вычислить:

1) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2}$;

3) $\sin\pi - \cos\pi$; 4) $\sin 0 - \cos 2\pi$;

5) $\sin\pi + \sin 1{,}5\pi$; 6) $\sin 0 + \cos 2\pi$.

431 Найти значения синуса и косинуса числа β, если:

1) $\beta = 3\pi$; 2) $\beta = 4\pi$; 3) $\beta = 3{,}5\pi$;

4) $\beta = \frac{5}{2}\pi$; 5) $\beta = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 6) $\beta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Вычислить (432—433).

432 1) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin\pi k + \cos 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

4) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin\frac{(4k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

433 1) $\operatorname{tg}\pi + \cos\pi$; 2) $\operatorname{tg} 0^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ$;

3) $\operatorname{tg}\pi + \sin\pi$; 4) $\cos\pi - \operatorname{tg} 2\pi$.

434 Найти значение выражения:

1) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

2) $5\sin\frac{\pi}{4} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 5\cos\frac{\pi}{4} - 10\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) : \cos\frac{\pi}{6}$;

4) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

435 Решить уравнение:

1) $2\sin x = 0$; 2) $\frac{1}{2}\cos x = 0$;

3) $\cos x - 1 = 0$; 4) $1 - \sin x = 0$.

436 Может ли $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ быть равным:

1) $0{,}049$; 2) $-0{,}875$; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2 + \sqrt{2}$?

437 Найти значение выражения:

1) $2\sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $0{,}5\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha$ при $\alpha = 60^\circ$;

3) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

4) $\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{3}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

438 **Найти значение выражения:**

1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$;

2) $2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}-\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}$;

3) $\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}\right)\left(\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\right)$;

4) $2\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{3}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}$.

439 **Решить уравнение:**

1) $\sin x=-1$; 2) $\cos x=-1$;

3) $\sin 3x=0$; 4) $\cos 0{,}5x=0$;

5) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)=1$; 6) $\cos\left(5x+\frac{4\pi}{5}\right)=1$.

443 **Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P\,(1;\,0)$ на угол:**

1) $\frac{\pi}{2}-\alpha$; 2) $\alpha-\pi$; 3) $\frac{3\pi}{2}-\alpha$;

4) $\frac{\pi}{2}+\alpha$; 5) $\alpha-\frac{\pi}{2}$; 6) $\pi-\alpha$?

444 **Определить знак числа $\sin\alpha$, если:**

1) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha=-\frac{33\pi}{7}$; 3) $\alpha=-\frac{4}{3}\pi$;

4) $\alpha=-0{,}1\pi$; 5) $\alpha=5{,}1$; 6) $\alpha=-470°$.

445 **Определить знак числа $\cos\alpha$, если:**

1) $\alpha=\frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha=\frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{2}{5}\pi$;

4) $\alpha=4{,}6$; 5) $\alpha=-5{,}3$; 6) $\alpha=-150°$.

446 **Определить знак числа $\mathrm{tg}\,\alpha$, если:**

1) $\alpha=\frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha=\frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{5}{4}\pi$;

4) $\alpha=3{,}7$; 5) $\alpha=-1{,}3$; 6) $\alpha=283°$.

447 **Определить знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, если:**

1) $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{3}{2}\pi<\alpha<\frac{7\pi}{4}$;

3) $\frac{7\pi}{4}<\alpha<2\pi$; 4) $2\pi<\alpha<2{,}5\pi$.

448 **Определить знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, если:**

1) $\alpha=1$; 2) $\alpha=3$; 3) $\alpha=-3{,}4$; 4) $\alpha=-1{,}3$.

Контрольные вопросы:

1. Закончите предложение: «Угол в один радиан находится в … четверти».
2. Определите знаки тригонометрических функций для угла 45°.
3. Определите знаки тригонометрических функций для угла 150°.
4. Определите знаки тригонометрических функций для угла 910°.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла

Цель практического занятия

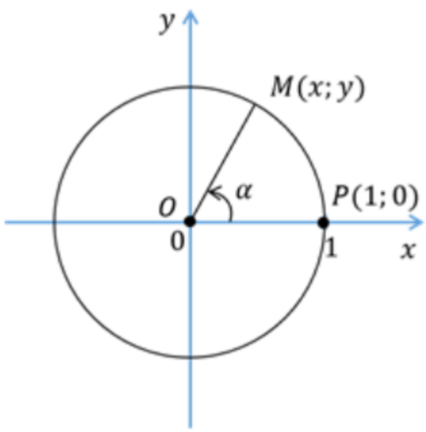
Выучить основное тригонометрическое тождество. Знать зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Основное тригонометрическое тождество.
2. Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла.

Пусть на координатной плоскости изображена единичная окружность с центром в начале координат. Точка $P(1;0)$ совершает поворот против часовой стрелки на угол α и оказывается в точке $M(x;y)$.



По определению синуса и косинуса можно сказать, что абсцисса точки M равна косинусу угла поворота, то есть $x = \cos\alpha$, а ордината точки M равна синусу угла поворота, то есть $y = \sin\alpha$. Тогда можем записать, что точка $M(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$.

Теперь вспомним, что уравнение единичной окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = 1$.

Так как точка M принадлежит нашей единичной окружности, то её координаты удовлетворяют этому уравнению. А значит, можем записать:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (**1**).

А как называется это равенство? Это равенство называют **основным тригонометрическим тождеством**. Оно выполняется при любых значениях α.

Основное тригонометрическое тождество часто используется при преобразовании тригонометрических выражений.

Давайте из этого тождества выразим $\sin\alpha$. Итак, перенесём $\cos^2\alpha$ в правую часть равенства: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. Извлекаем квадратный корень из обеих частей равенства: $\sqrt{\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$,

$|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, если α – угол I или II четверти. И $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, если α – угол III или IV четверти.

В общем, можем записать так: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \mathbf{(2)}$.

Теперь выразим $\cos\alpha$. Перенесём $\sin^2\alpha$ в правую часть равенства: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Извлекаем квадратный корень из обеих частей равенства: $\sqrt{\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, если α – угол I или IV четверти. $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, если α – угол II или III четверти.

В общем, можем записать так: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad \mathbf{(3)}$.

Вот таким образом мы получили равенства, которые связывают значения синуса и косинуса одного и того же угла.

Ну а теперь выясним зависимость между тангенсом и котангенсом. По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Перемножим почленно эти равенства: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$. И получим: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad \mathbf{(4)}$. Выразим из этого равенства $\operatorname{tg}\alpha$ и получим, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \quad \mathbf{(5)}$. И выразим $\operatorname{ctg}\alpha$ и получим, что $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \mathbf{(6)}$. Важно отметить, что так как на нуль делить нельзя, то $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha \neq 0$, то есть $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

И нам осталось найти зависимость между тангенсом и косинусом. Для этого мы с вами разделим обе части основного тригонометрического тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$: $\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. При этом $\cos\alpha$ не должен

равняться нулю, то есть $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Преобразуем левую часть равенства:

$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. Первое слагаемое в левой части можем записать как 1,

второе – как $\operatorname{tg}^2\alpha$: $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad(7)$.

Эта формула и показывает зависимость между тангенсом и косинусом? Да. Из этой формулы мы можем выразить тангенс через косинус и косинус через тангенс.

Задача 1 Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ Воспользуемся формулой (2). Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha < 0$, т. е. в формуле (2) перед корнем нужно поставить знак «−»:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \quad \triangleleft$$

Задача 2 Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

▶ Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, то $\cos\alpha > 0$, поэтому в формуле (3) перед корнем нужно поставить знак «+»:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad \triangleleft$$

Задача 3 Вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 13$.

▶ По формуле (6) находим $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{13}$. $\triangleleft$

Задача 4 Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

▶ По формуле (3) находим $\cos\alpha$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$. Поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}$. $\triangleleft$

Практическая часть

1. Выучите основное тригонометрическое тождество.
2. Выучите зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом.
3. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3876/main/199247/.

4. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3876/train/199251/.
5. Решите задачи:

458 **Вычислить:**

1) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

459 **По значению одной из тригонометрических функций ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$) найти значения остальных трёх:**

1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
2) $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

5) $\cos\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
6) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

7) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

460 **Какие значения может принимать:**

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$;

4) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$?

461 **Могут ли одновременно выполняться равенства:**

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$;
2) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

462 **Пусть α — один из углов прямоугольного треугольника. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$.**

465 Доказать тождество:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha$;

2) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha) = \cos^2\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$;

5) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \sin^2\alpha = 1$;
6) $\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} + \cos^2\alpha = 1$.

466 Упростить выражение:

1) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha - 2\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

467 Упростить выражение и найти его значение:

1) $\frac{\sin^2\alpha - 1}{1-\cos^2\alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

3) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

4) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

468 Доказать тождество:

1) $(1 - \sin^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = 1$;

2) $\sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

469 Упростить выражение:

1) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha - 1$;
2) $1 - \sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)$;

3) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha}$;
4) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

470 Доказать тождество:

1) $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = \sin^2 2\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha} = -\frac{1}{1+\sin\alpha}$;

3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

4) $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;

5) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$;

6) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

7) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = 1$;

8) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

471 Найти значение выражения $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}6$.

472 Найти значение выражения $\cos^3\alpha - \sin^3\alpha$, если $\cos\alpha - \sin\alpha = 0{,}2$.

473 Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$. Найти $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

474 Решить уравнение:

1) $2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) $2\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2 = 0$;

3) $3\cos^2 x - 2\sin x = 3 - 3\sin^2 x$;

4) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x - 1 - 2\sin^2 x$.

Контрольные вопросы:

1. Закончите предложение: «Синус и косинус могут принимать значения … ».
2. Сформулируйте основное тригонометрическое тождество.
3. Сформулируйте формулы, связывающие тригонометрические функции.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Синус, косинус, тангенс и котангенс углов α и $-\alpha$

Цель практического занятия

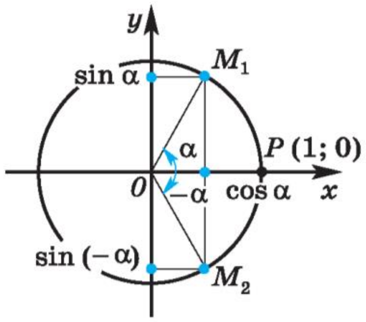
Научиться сводить вычисление значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$.

Рассмотрим единичную окружность в прямоугольной системе координат



Точка M_1 получена поворотом точки P(1;0) на угол α , а точка M_2 на угол $-\alpha$. Точки M_1 и M_2 будут симметричны относительно оси *Ox*, так как ось *Ox* делит угол $\angle M_1OM_2$ пополам. Значит, у этих точек одна и та же абсцисса. Мы знаем, что абсцисса точки на единичной окружности это косинус угла. Значит,

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

Ординаты точек противоположные числа. А так как ордината точки на единичной окружности это синус угла, то

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

Тангенс угла - это отношение синуса угла на косинус угла, а котангенс угла - это отношение косинуса угла на синус угла. Получаем формулы

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Равенства позволяют сводить значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов.

Практическая часть

1. Выучите основное тригонометрическое тождество.
2. Выучите зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом.
3. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4735/main/199278/.
4. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4735/train/199282/.
5. Решите задачи:

475 Вычислить:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

3) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\cos(-\pi)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\dfrac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

6) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3+7{,}5\operatorname{tg}(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\frac{3}{2}\pi$.

476 Упростить выражение:

1) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha(-\sin\alpha)$;

3) $\dfrac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

477 Вычислить:

1) $\dfrac{2-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

2) $\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

478 Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; 2) $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

479 Доказать тождество:

1) $\cos\alpha\sin(6\pi-\alpha)\cdot(1+\operatorname{ctg}^2(-\alpha))=\operatorname{ctg}(-\alpha)$;

2) $\dfrac{1-\sin^2(-\alpha)}{\cos(4\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin(\alpha-2\pi)}{1-\cos^2(-\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha$.

480 Решить уравнение:

1) $\sin(-x)=1$; 2) $\cos(-2x)=0$;

3) $\cos(-2x)=1$; 4) $\sin(-2x)=0$;

5) $\cos^2(-x)+\sin(-x)=2-\sin^2 x$;

6) $1-\sin^2(-x)+\cos(4\pi-x)=\cos(x-2\pi)$.

Контрольные вопросы:

1. Закончите предложение: «Синус отрицательного угла … ».
2. Закончите предложение: «Косинус отрицательного угла … ».
3. Закончите предложение: «Тангенс отрицательного угла … ».
4. Закончите предложение: «Котангенс отрицательного угла … ».

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Формулы сложения

Цель практического занятия

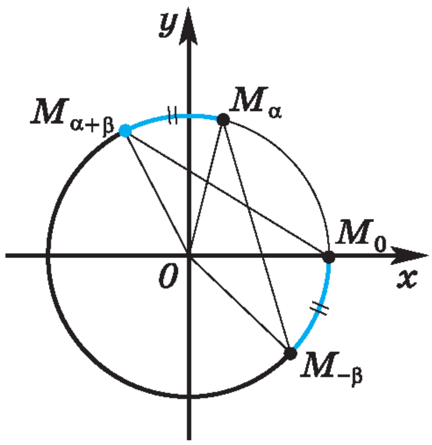
Узнать, что такое тригонометрические формулы синуса, косинуса, тангенса суммы и разности аргументов. Из этих формул выводятся практически все формулы тригонометрии.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Формулы синуса суммы и разности аргументов; косинуса суммы и разности аргументов; тангенс суммы и разности аргументов.
2. Преобразование тригонометрических выражений на основе использования формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса суммы и разности аргументов.
3. Вычисление значения тригонометрических выражений на основе формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса суммы и разности аргументов.
4. Доказательство тригонометрических тождеств на основе формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса суммы и разности аргументов.

Рассмотрим единичную окружность в прямоугольной системе координат *xOy*.



Точка $M\alpha$ получена поворотом точки $M_0(1;0)$ на угол α, а точка $M_{-\beta}$ на угол $-\beta$ и точка $M_{\alpha+\beta}$ на угол $(\alpha+\beta)$.

Углы $M_0OM_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}OM_{\alpha}$ равны, отрезки $OM_0 = OM\alpha = OM_{\alpha+\beta} = OM_{-\beta} = R$. Значит, треугольник $M_0OM_{\alpha+\beta}$ равен треугольнику $M_{-\beta}OM_{\alpha}$, следовательно у них одинаковые стороны $M_0M_{\alpha+\beta}$ и $M\alpha M_{-\beta}$.

Так как синус это ордината точки на единичной окружности, а косинус её абсцисса, то точки имеют координаты

$M\alpha(\cos\alpha;\sin\alpha)$;

$M_{-\beta}(\cos(-\beta);\sin(-\beta))$;

$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta)$).

Подставим координаты точек $M_0, M\alpha, M_{-\beta}$ и $M_{\alpha+\beta}$ в формулу для нахождения расстояния между ними. Получим:

$$(\mathrm{M}_{\circ}\mathrm{M}_{\alpha+\beta})^2 = (\mathrm{M}\alpha\mathrm{M}_{-\beta.})^2$$

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2 + (0-\sin(\alpha+\beta))^2 = (\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2 + (\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2 \quad .$$

Преобразуем левую часть, используя формулы квадрата суммы и разности двух выражений и тригонометрические тождества:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta) = 2-2\cos(\alpha+\beta)$$

Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned}(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2 \\ &= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta + +\sin^2\alpha \\ &= 2-2\cos\beta\cos\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Соединим левую и правую части:

$$2-2\cos(\alpha+\beta) = 2-2\cos\beta\cos\alpha+2\sin\alpha\sin\beta.$$

Разделим на (-2) каждое слагаемое :

$$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta.}$$

Получили формулу косинуса суммы.

Заменим β *на* $-\beta$ и учтём, что $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, получим формулу косинуса разности

$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\alpha\sin\beta.}$$

Докажем, что $\boldsymbol{\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha.}$

Так как $\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$, то по формуле косинуса разности получаем:

$$\cos(90°-\beta) = \cos\beta\cos 90° + \sin 90°\sin\beta$$

$\cos(90°-\beta) = \sin\beta.$ Заменим β *на* α, получим

$$\boldsymbol{\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha.}$$

Так, например, $\cos 23° = \sin 67°$, потому что $67° = 90° - 23°$.

Докажем, что $\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$

Подставим в формулу $\cos(90°-\boldsymbol{\beta}) = \sin\boldsymbol{\beta}$ значение $\boldsymbol{\beta = 90°-\alpha}$, получим:

$$\cos(90°-(\boldsymbol{90°-\alpha})) = \sin(\boldsymbol{90°-\alpha})$$

$$\boldsymbol{\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha}$$

Для тангенса и котангенса тоже справедливы формулы

$$\boldsymbol{tg(90°-\alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha}$$

$$\boldsymbol{ctg(90°-\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha}$$

Выведем формулу синуса суммы и разности:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(90° - (\alpha+\beta)) = \cos((90° - \alpha) - \beta)$$
$$= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \sin(90° - \alpha)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$.

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

В этой формуле заменим $\beta = -\beta$ и получим формулу синуса разности:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

Для тангенса тоже есть формула суммы и разности. По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Тогда tg $(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta.}$, разделим числитель и знаменатель на

$$\cos\alpha\cos\beta\ \textit{исократим}\ \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta}}{\frac{\cos\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta.}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

Получаем формулу тангенса суммы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$.

Для котангенса суммы и разности применяют формулы:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}$$

Итак, формулы сложения:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta} \qquad ctg(\alpha-\beta) = \frac{ctg\alpha - ctg\beta}{1 + ctg\alpha\cdot ctg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta} \qquad ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha + ctg\beta}{1 - ctg\alpha\cdot ctg\beta}$$

Задача 1 Вычислить cos 75°.

▶ По формуле (1) находим
$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45°\cos 30° -$
$- \sin 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. ◁

Заменив в формуле (1) β на $-\beta$, получим

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta),$$

откуда

$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.} \qquad (2)$$

Задача 2 Вычислить cos 15°.

▶ По формуле (2) получаем
$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° +$
$+ \sin 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. ◁

Практическая часть

1. Выучите зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом.
2. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4734/main/199309/.
3. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4734/train/199313/.
4. Решите задачи:

481 С помощью формул сложения вычислить:
1) $\cos 135°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\cos 150°$; 4) $\cos 240°$.

482 Вычислить, не пользуясь таблицами:
1) $\cos 57°30' \cos 27°30' + \sin 57°30' \sin 27°30'$;
2) $\cos 19°30' \cos 25°30' - \sin 19°30' \sin 25°30'$;
3) $\cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{11\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} \sin \frac{11\pi}{9}$;
4) $\cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}$.

483 Вычислить:
1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

484 Упростить выражение:
1) $\cos 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha$;
2) $\cos 5\beta \cos 2\beta + \sin 5\beta \sin 2\beta$;

485 Найти значение выражения:
1) $\sin 73° \cos 17° + \cos 73° \sin 17°$;
2) $\sin 73° \cos 13° - \cos 73° \sin 13°$;
3) $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$;
4) $\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$.

486 Вычислить:
1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

487 Упростить выражение:
1) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta)$;
2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta) - \sin(\alpha-\beta)$;
3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) - \sin(\alpha-\beta)$;
4) $\sin(\alpha+\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

488 Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$, и $\sin\beta = \frac{8}{17}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

489 Вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha = -0{,}8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, и $\sin\beta = -\frac{12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

492 Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}$;

3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$;

4) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha$;

5) $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$;

6) $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

493 Вычислить:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}29^\circ+\operatorname{tg}31^\circ}{1-\operatorname{tg}29^\circ\operatorname{tg}31^\circ}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}{1+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}$;

3) $\dfrac{1+\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}55^\circ}{\operatorname{tg}55^\circ-\operatorname{tg}10^\circ}$; 4) $\dfrac{1-\operatorname{tg}13^\circ\operatorname{tg}17^\circ}{\operatorname{tg}17^\circ+\operatorname{tg}13^\circ}$.

494 Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta=2{,}4$;

2) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{3}$ и $\operatorname{ctg}\beta=-1$.

Контрольные вопросы:

Найдите решение уравнения из промежутка [0; 90°]. Ответ запишите в градусах.

1. $\cos 0,34x\cos 0,66x-\sin 0,34x\sin 0,66x=1$

Ответ: ____________

2. $\sin 7,3x\cos 6,3x-\cos 6,3x\sin 7,3x=1$

Ответ: ____________

3. $\cos 67x\cos 66x+\sin 67x\sin 66x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: ____________

4. $\sin\dfrac{4}{11}x\cos\dfrac{7}{11}x+\cos\dfrac{4}{11}x\sin\dfrac{7}{11}x=\dfrac{1}{2}$

Ответ: ____________

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Синус, косинус, тангенс двойного угла

Цель практического занятия

Научиться сводить вычисление значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса двойного аргумента.
2. Преобразование тригонометрических выражений на основе использования формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса двойного аргумента.
3. Вычисление значений тригонометрических выражений на основе формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса двойного аргумента.
4. Доказательство тригонометрических тождеств на основе формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса двойного аргумента.
5. Решение уравнений с использованием формулы синуса, косинуса двойного аргумента.

Рассмотрим выражение $sin\,sin\,2\alpha$. Представим 2α как $\alpha+\alpha$ и подставим в формулу синуса суммы. Получим:

$$(\alpha+\alpha) = sin\,\sin\alpha\;cos\,\cos\alpha + cos\,\cos\alpha\;sin\,\sin\alpha = 2\,sin\,sin\,\alpha\;\;cos\,cos\,\alpha = sin\,sin\,2\alpha = 2sin\,sin\,\alpha\;\;cos\,cos\,\alpha \qquad \textbf{(1)}$$

Эту формулу называют **синус двойного аргумента.**

Например, $sin\,sin\,96° = 48°\;\;cos\,cos\,48°$. В этом случае $96° = 2\cdot 48°$.

Рассмотрим выражение $cos\,cos\,2\alpha$, где так же $2\alpha = \alpha+\alpha$. Применяем формулу косинуса суммы:

$$(\alpha+\alpha) = cos\,cos\,\alpha\;\;cos\,cos\,\alpha - sin\,sin\,\alpha\;\;sin\,sin\,\alpha = \alpha\,\alpha$$

Получили формулу **косинуса двойного аргумента** $cos\,cos\,2\alpha = \alpha\,\alpha$ **(2)**

Например, $cos\,cos\,74° = 37°\,37°$

Так как $\alpha = 1\alpha$, а $\alpha = 1-\alpha$, то получим ещё две формулы косинуса двойного аргумента.

$cos\,cos\,2\alpha = 1\alpha$ **(3)**

$cos\,cos\,2\alpha = \alpha - 1$ **(4)**

Рассмотрим выражение tg 2α и с помощью формулы тангенса суммы выведем формулу тангенса двойного угла. Помним, что $2\alpha = \alpha+\alpha$. Получаем:

$$\mathrm{tg}2\alpha = \mathrm{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-\alpha}$$

$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-\alpha}$, где $1-\alpha \neq 0$ **(5)**

Для котангенса двойного угла применяем формулу:

$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\alpha - 1}{2ctg\alpha}$ **, где** $\mathrm{ctg}\alpha \neq 0.$ **(6)**

Например, $\mathrm{tg}(\frac{2\pi}{5}) = \frac{2tg(\frac{\pi}{5})}{1-\frac{\pi}{5})}$.

Формулы (1)-(6) можно использовать как слева направо, так и справа налево. Аргументом может быть не только угол, но и любое выражение. Например,

$$2\sin\sin(45^\circ+\alpha)\ \cos\cos(45^\circ+\alpha) = (45^\circ+\alpha) = \sin\sin(90^\circ+2\alpha)\ = \cos 2\,\alpha$$

Докажем формулу для тройного угла.

Представим $3\alpha = 2\alpha + \alpha$. По формуле синуса суммы получим:

$$(2\alpha+\alpha)\ = \alpha\ \cos\cos\alpha + \alpha\ \sin\sin =$$

(используем формулы двойного аргумента)

$$2\sin\sin\alpha\,\alpha + (\alpha\ \alpha)\ \sin\sin\alpha\ =$$

$$2\sin\sin\alpha\,\alpha + \alpha\sin\sin\alpha - \alpha = 3\sin\sin\alpha\,\alpha - \alpha$$

(применяем формулу $\alpha\ = 1\alpha$)

$$3\sin\sin\alpha\ (1\alpha) - \alpha\ = 3\ \sin\sin\alpha\ - 4\alpha\ .$$

Получили формулу **синуса тройного угла:**

$$3\alpha\ = 3\ \sin\sin\alpha\ - 4\alpha\ . \quad (7)$$

Можно доказать, что **косинус тройного угла** вычисляется по формуле:

$$\cos\cos 3\alpha = 4\alpha - 3\cos\cos\alpha\ . \quad (8)$$

Практическая часть

1. Выучите основное тригонометрическое тождество.
2. Выучите зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом.
3. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3489/main/292742/.
4. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3489/train/292746/.
5. Решите задачи:

Выразить синус, косинус или тангенс, используя формулы двойного угла (498—499).

498 1) $\sin 48^\circ$; 2) $\cos 164^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 92^\circ$; 4) $\sin\frac{4\pi}{3}$; 5) $\cos\frac{5\pi}{3}$.

499 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin\alpha$; 6) $\cos\alpha$.

Вычислить, не используя калькулятор (500—502).

500 1) $2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ$; 2) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$;

3) $\frac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$; 4) $(\cos 75^\circ-\sin 75^\circ)^2$.

501 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;

3) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

502 1) $2\sin 75°\cdot\cos 75°$; 2) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$;
3) $\frac{6\,\mathrm{tg}\,75°}{1-\mathrm{tg}^2\,75°}$; 4) $\frac{\mathrm{tg}^2\,22°30'-1}{\mathrm{tg}\,22°30'}$.

503 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:
1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 2) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

504 Вычислить $\cos 2\alpha$, если:
1) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$.

505 Вычислить $\mathrm{tg}\,2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}5$.

Упростить выражение **(506—507)**.

506 1) $2\cos 40°\cdot\cos 50°$; 2) $2\sin 25°\cdot\sin 65°$;
3) $\sin 2\alpha+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$; 4) $\cos 4\alpha+\sin^2 2\alpha$.

507 1) $\frac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$; 2) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

508 Доказать тождество:
1) $\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$;
2) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$;
3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=1$.

509 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:
1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{3}$.

510 Доказать тождество:
1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha-1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=-2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;
3) $\mathrm{tg}\,\alpha\,(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha$; 4) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$;
5) $\frac{(1-2\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha-1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\,2\alpha$;
6) $1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\alpha$; 7) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha$.

511 Доказать тождество
$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\,(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1+\mathrm{tg}\,\alpha)}=\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}.$$

512 Решить уравнение:
1) $\sin 2x-2\cos x=0$; 2) $\cos 2x+\sin^2 x=1$;
3) $4\cos x=\sin 2x$; 4) $\sin^2 x=-\cos 2x$;
5) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=0$; 6) $\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}$.

Контрольные вопросы:

№1. Найдите $\frac{2\sin 4\alpha}{7\cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha=0{,}7$

№2. а) $\frac{44\sin 140^\circ\cdot\cos 140^\circ}{\sin 280^\circ}$; б) $\frac{-10\sin 164^\circ}{\sin 82^\circ\cdot\sin 8^\circ}$; в) $\frac{12\sin 114^\circ}{\cos 57^\circ\cdot\cos 33^\circ}$.

№3. $\sin\frac{13\pi}{12}\cdot\cos\frac{13\pi}{12}$

№4. а) $\frac{19\left(\sin^2 84^\circ-\cos^2 84^\circ\right)}{\cos 168^\circ}$; б) $\sqrt{8}\cos^2\frac{13\pi}{8}-\sqrt{8}\sin^2\frac{13\pi}{8}$.

№5. Найдите а) $98\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{5}{7}$; б) $-37\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=-0{,}6$.

№6. Найдите $-18\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}6$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Синус, косинус, тангенс и котангенс половинного угла

Цель практического занятия

Познакомиться с формулами синуса, косинуса, тангенса и котангенса половинного аргумента.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса половинного аргумента.
2. Преобразование тригонометрических выражений на основе использования формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса половинного аргумента.
3. Решение уравнения с использованием формулы синуса, косинуса половинного аргумента.

Сегодня мы узнаем формулы, позволяющие нам по известным значениям $\sin\alpha; \cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ находить $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Их называют формулы половинного аргумента.

Повторим формулу косинуса двойного аргумента $\boldsymbol{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$.

А если учесть, что $\boldsymbol{\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha}$ и $\boldsymbol{\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha}$, то получим ещё две формулы, которые нам сегодня понадобятся:

$\boldsymbol{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$ и $\boldsymbol{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

Пример. а) Найти $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}2$.

Вычислим $\cos 2\alpha$ по формуле $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot 0{,}2^2 = 0{,}92.$

б) Найти $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}9$.

Вычислим $\cos 2\alpha$ по формуле $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot(-0{,}9)^2 - 1 = 0{,}62$.

Запишем формулу косинуса двойного аргумента в виде $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и заменим x на $\frac{\alpha}{2}$. Тогда получим: $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, учтём, что

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, получаем

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

$\boldsymbol{\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}}$ **(1)** формула **синуса половинного аргумента.**

Запишем формулу косинуса двойного угла, где $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$ в виде

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha + 1$$

$\boldsymbol{\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2}}$ **(2)** формула **косинуса половинного угла.**

По формулам (1) и (2) можно найти $\sin\frac{\alpha}{2}$ или $\cos\frac{\alpha}{2}$, если известны значения $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ и положение угла α, т.е. в какой координатной четверти он находится, чтобы определить знак выражения $\sin\frac{\alpha}{2}$ или $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Эти формулы ещё имеют название «формулы понижения степени», так как в левой части находится вторая степень синуса и косинуса, а в правой – первая, т.е. степень понизилась. Но будьте внимательны: степень понижается, а аргумент удваивается.

Например, $\cos^2 23° = \frac{\cos 46° + 1}{2}$.

Пример. Известно, что $\cos\alpha = 0{,}4, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$ найдём по формуле: $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}4}{2} = 0{,}3$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{0{,}3}$.

По условию $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Разделив обе части неравенства на 2, получаем $\frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$, значит угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, здесь синус положительный. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}3}$.

2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; найдём по формуле $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha+1}{2} = \frac{0{,}4+1}{2} = 0{,}75 =$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{0{,}75} = \pm 0{,}5\sqrt{3}$

Мы уже выяснили, что угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, косинус отрицательный. $\cos\frac{\alpha}{2} = -0{,}5\sqrt{3}$.

3) Так как тангенс это отношение синуса на косинус, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{0{,}3}}{-0{,}5\sqrt{3}} = -2\sqrt{0{,}1}.$

Выведем формулу для тангенса половинного аргумента. Для этого разделим левую часть формулы (1) на левую часть формулы (2) и правую часть формулы (1) на правую часть формулы (2).

$$\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$$ сократим на 2 , и учитывая, что $\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, получим:

$\boldsymbol{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha+1}}$ **формула тангенса половинного аргумента (3).**

Так как котангенс это число, взаимообратное тангенсу, то $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

Пример. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

По формуле (3) находим $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha+1} = \frac{1+0.6}{-0{,}6+1} = \frac{1{,}6}{0{,}4} = 4$, а $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm 2.$ Найдём положение угла $\frac{\alpha}{2}$.

По условию $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,(разделим на 2)

$\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, угол $\frac{\alpha}{2}$ в первой четверти, тангенс положительный, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$, а $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 0{,}5$.

Выведем формулу, по которой можно найти $\sin\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Для этого используем формулу синуса двойного угла $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, заменив в ней x на $\frac{\alpha}{2}$.

Получаем $\sin\alpha = \sin(2\cdot\frac{\alpha}{2}) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1}$, учтём, что $1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$, то

$\sin\alpha = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, разделим числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad (4)$$

Выведем формулу для $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Применим формулу косинуса двойного угла, где $\alpha = 2(\frac{\alpha}{2})$, $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2},}{1} = \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, разделим числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad (5)$$

Пример. Найти $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

По формуле (5) $\cos\alpha = \dfrac{1-2^2}{1+2^2} = \dfrac{1-4}{1+4} = -0{,}6$.

Если в формуле тангенса двойного угла $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ представить $\alpha = 2(\frac{\alpha}{2})$, то получим ещё одну формулу, по которой тангенс угла α можно найти через тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

С помощью доказанных на этом уроке формул можно не только вычислять значения выражений, но и упрощать выражения, доказывать тождества и решать тригонометрических уравнений.

Пример. Доказать тождество $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Представим $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, а $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, преобразуем левую часть тождества

$\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$, но $1-\cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$, то

Практическая часть

1. Выучите формулы половинного угла.
2. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3887/main/199371/.
3. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3887/train/199375/.
4. Решите задачи:

514 **Найти числовое значение выражения:**

1) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$; 2) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sin^2 15°$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cos^2 15°$.

515 **Пусть** $\cos\alpha = 0{,}6$ **и** $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. **Вычислить:**

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

516 Пусть $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

517 Вычислить:

1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\operatorname{tg} 22°30'$; 4) $\operatorname{ctg} 22°30'$.

518 Упростить выражение:

1) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 3) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$;

4) $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$; 5) $\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

6) $(1-\cos 2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$.

Доказать тождество (519—520).

519 1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 1+\sin\alpha$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 1-\sin\alpha$;

3) $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

520 1) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

3) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

521 Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$.

522 Упростить выражение $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha}$.

523 Решить уравнение:

1) $1-\cos x = 2\sin\frac{x}{2}$; 2) $1+\cos x = 2\cos\frac{x}{2}$;

3) $1+\cos\frac{x}{2} = 2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $1+\cos 8x = 2\cos 4x$;

5) $2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x = 1$; 6) $2\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 4x = 1$.

Контрольные вопросы:

Известно, что $cos\alpha = 0,8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Найдите ; $sin\frac{\alpha}{2}$; $cos\frac{\alpha}{2}$; $tg\frac{\alpha}{2}$; $ctg\frac{\alpha}{2}$

1) $sin\frac{\alpha}{2}$

2) $cos\frac{\alpha}{2}$

3) $tg\frac{\alpha}{2}$

4) $ctg\frac{\alpha}{2}$

А. $\sqrt{0,1}$

Б. $\sqrt{0,9}$

В. $\frac{1}{3}$

Г. 3

Д. $2\sqrt{0,2}$

1	2	3	4

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Формулы приведения

Цель практического занятия

Познакомиться с формулами приведения и научиться их применять при упрощении тригонометрических выражений, решении тригонометрических уравнений и доказательствах тождеств.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Формулы приведения.
2. Мнемоническое правило для формул приведения.
3. Преобразование тригонометрических выражений на основе использования формул приведения.
4. Вычисление значений тригонометрических выражений на основе формул приведения.
5. Доказательство тригонометрические тождества на основе формул приведения.
6. Решение уравнения с использованием формул приведения.

Для вычисления углов больше 90 $^\circ$ используют формулы приведения. Они позволяют синус, косинус, тангенс и котангенс различных углов приводить к острым углам.

Пример: Вычислить $\cos 750^\circ$ и $\sin 750^\circ$.

Представим число $750^\circ = 720^\circ + 30^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ$.

Рассмотрим точку A(1;0) на единичной окружности. При повороте вокруг начала координат на угол 750° она сделает 2 полных оборота $2 \cdot 360^\circ$ и ещё повернётся на угол 30° . Переместится в точку B, в которую могла бы попасть, сделав поворот на угол 30° . Значит, $\sin 750^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 750^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

А так как $750^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ$, то $\sin(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ$, $\cos(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$

Количество полных оборотов по 360 $^\circ$ или по 2π может выражаться любым целым числом *k*, как положительным, так и отрицательным и нулём. При повороте точки A(1;0) на угол $(\alpha + 2\pi k)$, где k $\in Z$ получается та же самая точка, что при повороте на угол α.

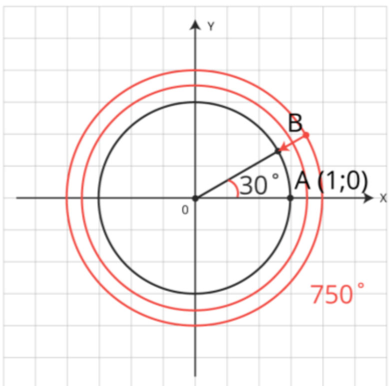


Рисунок 1 – точки A и B на единичной окружности

Справедливы равенства:

$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha$ **, где** $k \in Z$, $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha$ **, где** $k \in Z$

Пусть точка A(1;0) переместилась в точку B_1 при повороте на угол $\alpha = 145^\circ$ и в точку B при повороте на угол 45° (рис. 2).

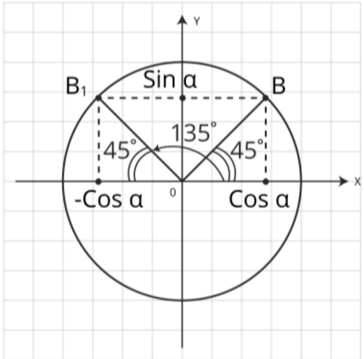


Рисунок 2 – точки A, B, B1 на единичной окружности

Запишем 145° в виде: $145^\circ = 180^\circ - 45^\circ$. На единичной окружности точки B_1 и B симметричны относительно оси Оy, значит их ординаты (синусы) равны, абсциссы (косинусы)- противоположные числа.

Поэтому $\sin 145^\circ = \sin 45^\circ$, а $\cos 145^\circ = -\cos 45^\circ$.

А так как $145^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, то $\sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$, $\cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ$.

Помним, что $180^\circ = \pi$, тогда $\sin(\pi - 45^\circ) = \sin 45^\circ$, $\cos(\pi - 45^\circ) = -\cos 45^\circ$.

Докажем, что для всех углов α справедливы формулы:

$$\mathbf{\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha}, \quad \mathbf{\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha}.$$

Воспользуемся формулой синуса и косинуса разности: $\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \sin\alpha\cos\pi$, подставим известные значения $\sin\pi = 0, \cos\pi = -1$ в формулу, получаем:

$$\sin(\pi - \alpha) = 0 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot 1 = \sin\alpha.$$

$$\mathbf{\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha} \quad \textbf{(1)}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos\pi\cos\alpha + \sin\pi\sin\alpha = -\cos\alpha$$

$$\mathbf{\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha} \quad \textbf{(2)}$$

Аналогично доказываются формулы:

$$\mathbf{\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha} \quad \textbf{(3)}$$

$$\mathbf{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha} \quad \textbf{(4)}$$

$$\mathbf{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha} \quad \textbf{(5)}$$

$$\mathbf{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha} \quad \textbf{(6)}$$

$$\mathbf{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha} \quad \textbf{(7)}$$

$$\mathbf{\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha} \quad \textbf{(8)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha \quad (9)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha \quad (10)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha \quad (11)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha \quad (12)$$

Эти формулы называются **формулами приведения для синуса и косинуса**.

Выведем формулы для тангенса, используя его определение

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

Найдём $\mathrm{tg}(\alpha+\pi)$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi) = \frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\pi) = \frac{\sin(\alpha-\pi)}{\cos(\alpha-\pi)} = \frac{-\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi) = \mathrm{tg}(\alpha-\pi) = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Получаем **формулы для тангенса и котангенса**:

$\mathrm{tg}(\alpha+\pi k) = \mathrm{tg}\,\alpha$ **, где** $k \in Z$ **и** $\mathrm{ctg}(\alpha+\pi k) = \mathrm{ctg}\,\alpha$ **, где** $k \in Z$ **(13)**

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha \quad (14)$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \mathrm{ctg}\,\alpha \quad (15)$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha \quad (16)$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \mathrm{ctg}\,\alpha \quad (17)$$

Пример: вычислите $\mathrm{tg}\left(\frac{17\pi}{4}\right)$.

Преобразуем выражение в скобке $\frac{17\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 .$$

Обратите внимание, что все эти формулы связывают синусы с синусами или косинусами, а тангенсы с тангенсами или котангенсами. В одних случаях синус меняется на косинус и наоборот, в других – нет. Так, например, в формулах 1,2,3,8 и 13, где в левой части присутствуют π, синусы, косинусы и тангенсы не меняются.

В остальных формулах, где в левой части присутствуют $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, синус меняется на косинус и наоборот, а тангенс на котангенс.

Формул приведений много и их не обязательно каждый раз выводить и запоминать.

Для этого придумали мнемоническое правило.

1. **Если в левой части присутствуют $\pi, 2\pi, 3\pi$ и т.д. синусы, косинусы и тангенсы не меняются.**

   Если в левой части присутствуют $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, синус меняется на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс.

1. **Знак в правой части ставим тот же, который имело исходное число в левой части, при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.**

   Существует легенда про рассеянного математика, который всё время забывал менять или не менять синус на косинус и наоборот. Он смотрел на свою сообразительную лошадь и она кивала головой вдоль той оси, где стояли числа $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, π и 2π. (рис. 3)

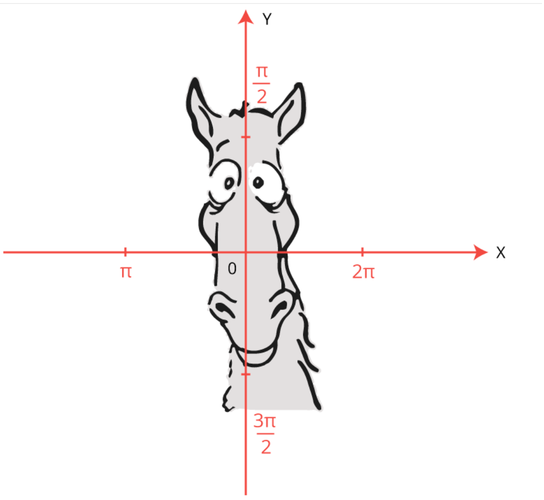


Рисунок 3 – «правило лошади»

Если аргумент содержал $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, лошадь кивала вдоль оси Оу. Это означало «да, менять». А если $\alpha \pm \pi$, кивала вдоль оси Ох – «не менять».

Так же помните: чётные числа вида 2π, $4\pi, 6\pi$ и т.д. находятся на оси Ох справа от нуля на единичной окружности, а нечётные $\pi, 3\pi, 5\pi$ и т. д. слева от нуля.

Если в выражении перед α стоит **плюс**, то точка перемещается по окружности **по часовой стрелке**, если стоит **минус**, то **против часовой стрелке**.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1: упростите выражение $\cos(81\pi - \alpha)$.

81π находится на оси Ох, слева от нуля, косинус не меняем. Перед α минус, точка перемещается против часовой стрелке и попадает во вторую четверть, здесь косинусы отрицательные (рис.4)

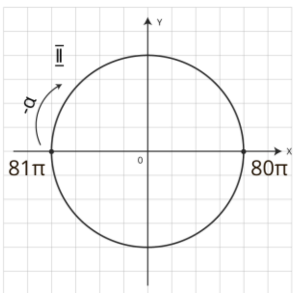


Рисунок 4 – перемещение точки по единичной окружности

Значит $\cos(81\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$.

Пример 2: вычислите $\sin\left(\frac{43\pi}{6}\right)$.

Преобразуем выражение в скобке: $\frac{43\pi}{6}=\frac{42\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=7\pi+\frac{\pi}{6}$. 7π находится слева на оси Ох, синус не меняем. Угол в третьей четверти, синусы отрицательные.

$$\sin\left(\frac{43\pi}{6}\right)=\sin\left(7\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Практическая часть

1. Выучите формулы приведения.
2. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3490/main/199402/.
3. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3490/train/199406/.
4. Решите задачи:

Вычислить с помощью формулы приведения (525—526).

525 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\operatorname{ctg} 135°$; 4) $\cos 120°$;
5) $\cos 225°$; 6) $\sin 210°$; 7) $\operatorname{ctg} 240°$; 8) $\sin 315°$.

526 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$;
5) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

Упростить выражение (527—528).

527 1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

528 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

529 **Вычислить:**
1) $\cos 750°$; 2) $\sin 1140°$; 3) $\operatorname{tg} 405°$; 4) $\cos 840°$;
5) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 7) $\operatorname{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 8) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

530 Найти значение выражения:

1) $\cos 630° - \sin 1470° - \mathrm{ctg}\ 1125°$;

2) $\mathrm{tg}\ 1800° - \sin 495° + \cos 945°$;

3) $3\cos 3660° + \sin(-1560°) + \cos(-450°)$;

4) $\cos 4455° - \cos(-945°) + \mathrm{tg}\ 1035° - \mathrm{ctg}(-1500°)$.

531 Вычислить:

1) $\cos\frac{23\pi}{4} - \sin\frac{15\pi}{4} - \mathrm{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right)$;

2) $\sin\frac{25\pi}{3} - \cos\left(-\frac{17\pi}{2}\right) - \mathrm{tg}\frac{10\pi}{3}$;

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{31\pi}{3} - \mathrm{tg}\frac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \mathrm{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

Доказать тождество (**532—533**).

532 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 0$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = 0$;

3) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)} \cdot \frac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)} = -\sin\alpha$.

533 1) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

2) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$;

3) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$.

534 Доказать, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу его третьего угла.

535 Решить уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 1$; 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = 1$;

3) $\cos(x-\pi) = 0$; 4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

5) $\sin(2x+3\pi)\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right) - \sin 3x\cos 2x = -1$;

6) $\sin\left(5x-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2x+4\pi) - \sin(5x+\pi)\sin 2x = 0$.

536 Доказать, что вычисление значений синуса, косинуса и тангенса любого угла можно свести к вычислению их значений для угла, заключённого в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте мнемоническое правило.

2. Вычислите и соотнесите с ответом

1. $cos30°$	
2. $sin\frac{\pi}{6}$	А $0,5$
3. $tg0$	Б $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $cos90°$	В 1
5. $tg\frac{\pi}{4}$	Г 0
6. $cos0°$	
7. $sin\frac{\pi}{3}$	Д $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Сумма и разность синусов и косинусов

Цель практического занятия

Познакомиться с формулами формулами, особенно полезными для решения тригонометрических уравнений, так как они позволяют разложить сумму или разность синусов и косинусов на множители.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Преобразование тригонометрических выражений с помощью формул суммы и разности синусов, косинусов.
2. Вычисление значений тригонометрических выражений на основе формул суммы и разности.
3. Доказательство тригонометрических тождеств на основе формул суммы и разности.

Рассмотрим выражение $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$. С помощью формул синуса суммы и разности преобразуем его.

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=2\sin\alpha\cos\beta$$

Обозначим $\alpha+\beta=\mathrm{X}$; $\alpha-\beta=\mathrm{У}$. Сложим и вычтем эти равенства:

$$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=\mathrm{X}+\mathrm{У}$$

$$(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=\mathrm{X}-\mathrm{У}$$

$$2\alpha=\mathrm{X}+\mathrm{У}$$

$$2\beta=\mathrm{X}-\mathrm{У}=\mathrm{X}-\mathrm{У}$$

$$\alpha=\frac{\mathrm{X}+\mathrm{У}}{2}\beta=\frac{\mathrm{X}-\mathrm{У}}{2}$$

Подставим в формулу суммы синусов и разности вместо α и β получившиеся выражения , а вместо $\alpha+\beta=\mathrm{X}$; $\alpha-\beta=\mathrm{У}$.

Получаем: $\sin\mathrm{X}+\sin\mathrm{У}=2\sin\frac{\mathrm{X}+\mathrm{У}}{2}\cos\frac{\mathrm{X}-\mathrm{У}}{2}$ **формулу суммы синусов. (1)**

Пример: Упростите выражение $\sin 24°+\sin 36°$. Применяем формулу (1):

$$\sin 24°+\sin 36°=2\sin\frac{24°+36°}{2}\cos\frac{24°-36°}{2}=2\sin 30°\cos(-6°)=2\cdot\frac{1}{2}\cos 6°=\cos 6°$$.

Так как $\sin(-y)=-\sin y$, то из формулы суммы синусов получим формулу разности синусов, заменив У на $-\mathrm{У}$.

$$\mathbf{\sin X-\sin У=2\sin\frac{X-У}{2}\cos\frac{X+У}{2}}\quad\mathbf{(2)}$$

Так как $\sin(-y)=-\sin y$, то из формулы суммы синусов получим формулу разности синусов, заменив У на $-\mathrm{У}$.

$$\mathbf{\sin X-\sin У=2\sin\frac{X-У}{2}\cos\frac{X+У}{2}}\quad\mathbf{(2)}$$

Пример. Упростите выражение $\sin 108°-\sin 12°$. Применяем формулу (2):

$$\sin 108°-\sin 12°=2\sin\frac{108°-12°}{2}\cos\frac{108°+12°}{2}=2\sin 96°\cos 60°=2\cdot\frac{1}{2}\sin 96°=\cos 6°$$.

Аналогично доказывается формула суммы и разности косинусов:

$$\mathbf{\cos X + \cos У = 2\cos\frac{X+У}{2}\cos\frac{X-У}{2}} \quad \textbf{(3)}$$

$$\mathbf{\cos X - \cos У = -2\sin\frac{X+У}{2}\sin\frac{X-У}{2}} \quad \textbf{(4)}$$

Пример. Представьте в виде произведения: $\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{6}$.

Применяем формулу (3):

$$\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{6} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{24}-\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{15\pi}{24}\right)\cos\left(-\frac{5\pi}{24}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{15\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right) .$$

Пример. Запишите в виде произведения выражение $\frac{1}{2}-\cos\alpha$.

Так как $\cos 60° = \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{2}-\cos\alpha = \cos 60° - \cos\alpha = -2\sin\frac{60°+\alpha}{2}\sin\frac{60°-\alpha}{2}$.

Пример. Решите уравнение:

$\sin 13x - \sin 3x = 0;$

$2\sin\frac{13x-3x}{2}\cos\frac{13x+3x}{2} = 0$;

$2\sin 5x\cos 8x = 0$;

$\sin 5x = 0$ **или** $\cos 8x = 0$;

$5x = \pi k$; $8x = \frac{\pi}{2}+\pi k;$

$x = \frac{\pi k}{5}$; $x = \frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$;

Ответ: $\frac{\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{16}$ + $\frac{\pi k}{8}, k\epsilon Z$.

Пример. Представьте в виде произведения выражение $\sin\alpha + \cos\alpha$.

В формулах (1)-(4) складываются одноимённые величины. В нашем случае нужно косинус заменить на синус с помощью формулы приведения $: \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\sin\frac{\alpha+(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{2}\cos\frac{\alpha-(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) .$$

Пример. Представьте в виде произведения выражение $tg\alpha + tg\beta$.

Используя определения тангенса, получаем: $tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

в числителе записана формула синуса суммы справа налево, значит

$tg\alpha + tg\beta = \frac{\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)}}{\boldsymbol{\cos\alpha\cos\beta}}$. По этой формуле можно находить сумму тангенсов.

Пример. Найти $tg110°$ + $tg70°$.

Используем доказанное выше равенство: $tg110°$ + $tg70° = \frac{\sin(110°+70°)}{\cos 110°\cos 70°} = \frac{\sin 180°}{\cos 110°\cos 70°} = 0$.

Для решения некоторых задач, например при изучении колебаний, необходимо преобразовывать в произведение сумму такого вида: $A\sin x + B\cos x$.

Рассмотрим выражение: $\sin x + \sqrt{3}\cos x$, если умножить и разделить на 2, то его значение не изменится и примет вид: $2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$, заменим коэффициенты, учитывая, что $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, и получим $2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$, в скобках формула синуса суммы, т.е. $2\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$.

После преобразований получили $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Выражение вида $A\sin x + B\cos x$ (в данном случае A=1, $B = \sqrt{3}$) представили в виде $C\sin(x+\beta)$, где C=2, $\beta = \frac{\pi}{3}$. Можно проверить, что $C^2 = A^2 - B^2$, действительно A^2 + B^2 = $1^2 + \sqrt{3}^2$ =1+3=4= 2^2 = C^2 . Это не случайно. Если выражение $A\sin x + B\cos x$ разделить и умножить на C, то получим $C\left(\frac{A}{C}\sin x + \frac{B}{C}\cos x\right)$, причём $\frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} = \frac{A^2+B^2}{C^2} = \frac{C^2}{C^2} = 1$

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = 1$$

Значит, пара чисел $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ удовлетворяет уравнению окружности $x^2 + y^2 = 1$

с центром в начале координат и радиусом 1. А это значит, что точка с координатами $\left(\frac{A}{C}; \frac{B}{C}\right)$ лежит на единичной окружности. Т.е. её абсцисса это косинус, $\frac{A}{C} = \cos\beta$, а ордината- синус, $\frac{B}{C} = \sin\beta$.

Получаем: $A\sin x + B\cos x = C\left(\frac{A}{C}\sin x + \frac{B}{C}\cos x\right) = C(\cos\beta\sin x + \sin\beta\cos x) = C\sin(x+\beta)$, где $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.
β называют вспомогательным аргументом. А равенство:

$\mathbf{A\sin x + B\cos x = C\sin(x + \beta)}$ (5) формулой вспомогательного аргумента:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2},$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2},$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Практическая часть

1. Выучите формулы суммы и разности.
2. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4238/main/107830/.
3. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4238/train/107834/.
4. Решите задачи:

537 Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 4) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

538 **Вычислить:**

1) $\cos 105° + \cos 75°$; 2) $\sin 105° - \sin 75°$;

3) $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}$;

5) $\sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}$; 6) $\sin 105° + \sin 165°$.

539 **Преобразовать в произведение:**

1) $1 + 2\sin\alpha$; 2) $1 - 2\sin\alpha$; 3) $1 + 2\cos\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha$.

540 **Доказать тождество:**

1) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

541 **Упростить выражение:**

1) $\frac{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$; 2) $\frac{1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}$.

542 **Доказать тождество:**

1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 0$;

3) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$.

543 **Записать в виде произведения:**

1) $\cos 22° + \cos 24° + \cos 26° + \cos 28°$;

2) $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6}$.

544 **Доказать тождество** $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$ **и вычислить:**

1) $\operatorname{tg} 267° + \operatorname{tg} 93°$; 2) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}$.

545 **Разложить на множители:**

1) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$;

3) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте формулу суммы синусов.
2. Сформулируйте формулу разности синусов.
3. Сформулируйте формулу суммы косинусов.
4. Сформулируйте формулу разности косинусов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Тригонометрические уравнения

Цель практического занятия

Научиться решать простейшие тригонометрические уравнения.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Решение уравнения $\cos x = a$ для табличных значений.
2. Арккосинус числа, простейшие тождества с арккосинусом.
3. Решение уравнения $\cos x = a$ для произвольных значений.
4. Решение уравнения вида $\cos(kx + b) = a$.
5. Решение уравнения вида $(k \cos x \pm b)(m \cos x \pm a) = 0$.
6. Решение уравнения $\sin x = a$ для табличных значений.
7. Арксинус числа, простейшие тождества с арксинусом.
8. Решение уравнения $\sin x = a$ для произвольных значений.
9. Решение уравнения вида $\sin(kx + b) = a$.
10. Решение уравнения вида $(k \sin x \pm b)(m \sin x \pm a) = 0$.
11. Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ для табличных значений.
12. Арктангенс числа, простейшие тождества с арктангенсом.
13. Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ для произвольных значений.
14. Решение уравнения вида $\operatorname{tg}(kx + b) = a$.
15. Решение уравнения вида $(k \operatorname{tg} \pm b)(m \operatorname{tg} x \pm a) = 0$.

Арккосинусом числа m $(|m| \le 1)$ называется такое число α, что: $\cos\alpha = m$ и $0 \le \alpha \le \pi$.

Арккосинус числа m обозначают: $\arccos m$.

Решение тригонометрического уравнения $\cos\alpha = m$ на первом этапе целесообразно выполнять с использованием тригонометрической окружности. Из рисунка видно, что при $|m| > 1$, таких точек нет, при $|m| = 1$, такая точка одна, при $|m| < 1$, таких точек две.

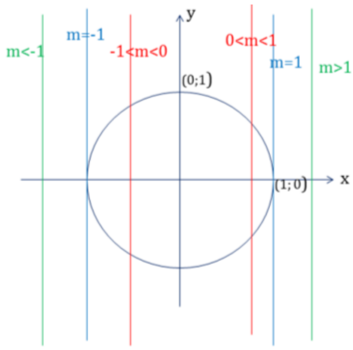


Рисунок 1 – Точки пересечения прямой x = m с тригонометрической окружностью

Рассмотрим решение уравнения $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Прямая $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках:

M(π/6) и N(-π/6).

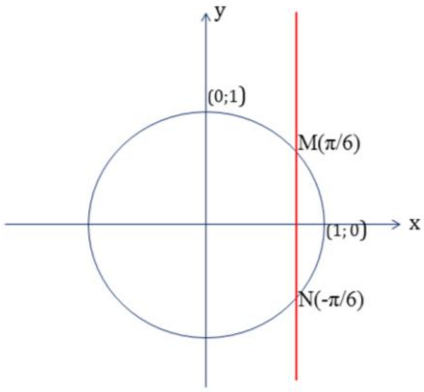


Рисунок 2 – Решение уравнения $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Точка M(π/6) соответствует всем числа вида $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Точка N(-π/6) соответствует всем числа вида $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Таким образом, решение уравнения $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ можно записать так:

$\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Чтобы уметь решать уравнение $\cos\alpha = m$ для произвольных значений m, вводится понятие арккосинуса.

Арккосинусом числа m $(|m| \le 1)$ называется такое число α, что: $\cos\alpha = m$ и $0 \le \alpha \le \pi$.

Арккосинус числа m обозначают: $\arccos m$

Для $|m| \le 1$ $\cos(\arccos m) = m$

Если $\cos\alpha = m$ и $0 \le \alpha \le \pi$, то $\arccos(\cos\alpha) = a$.

Два простейших тождества для арккосинуса.

. $\cos(\arccos m) = m$ для любого m: $|m| \le 1$
. $\arccos(\cos\alpha) = a$ для любого α: $0 \le \alpha \le \pi$

Из рисунка видно, что $\arccos(-m) = \pi - \arccos m$.

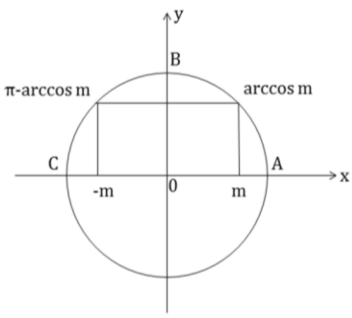


Рисунок 3 – Связь между $\arccos(-m)$ и $-\arccos m$

Решением уравнения $\cos\alpha = m$ являются все числа вида

$\alpha = \pm\arccos m + 2\pi k, k \in Z$

№1.Решите уравнение $\cos(2-3x)=\cos(4x-5)$.

В ответ запишите наименьший положительный корень.

Решение:

$$2-3x=\pm(4x-5)+2\pi k, k\in Z$$

$$\left[\begin{array}{l}2-3x-4x+5-2\pi k=0\\2-3x+4x-5-2\pi k=0\end{array}\right., k\in Z$$

$$\left[\begin{array}{l}7x-7+2\pi k=0\\x-3-2\pi k=0\end{array}\right., k\in Z$$

$$\left[\begin{array}{l}x=1-2\pi k\\x=3+2\pi k\end{array}\right., k\in Z$$

При $k=0$ получаем $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

При увеличении значений k значение первого корня будет отрицательным, а значение второго корня будет увеличиваться.

При уменьшении значений k значение первого корня будет увеличиваться, а значение второго корня будет отрицательным. Поэтому наименьшее положительное значение корня 1.

Ответ: 1

№2.Решите уравнение $\cos\left(x^2-4x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$. Определите, сколько решений имеет это уравнение при:

1. k=-3

   Ответ: 0

1. k=0

   Ответ: 4

1. k=2

   Ответ: 4

Решение:

Запишем решение данного уравнения в виде:

$$x^2-4x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$$

Тогда: $\left[\begin{array}{l}x^2-4x-\frac{\pi}{12}-2\pi k=0\\x^2-4x+\frac{7\pi}{12}-2\pi k=0\end{array}\right., k\in Z$

$$\left[\begin{array}{l}x=2\pm\sqrt{4+\frac{\pi}{12}+2\pi k}\\x=2\pm\sqrt{4-\frac{7\pi}{12}+2\pi k}\end{array}\right., k\in Z$$

Первое уравнение имеет решение, если $4+\frac{\pi}{12}+2\pi k\geq 0$. То есть $k\geq -\frac{1}{24}-\frac{2}{\pi}$, или $k\geq 0$.

Второе уравнение имеет решение, если $4-\frac{7\pi}{12}+2\pi k\geq 0$. То есть $k\geq\frac{7}{24}-\frac{2}{\pi}$, или $k\geq 0$.

Поэтому при $k\geq 0$ уравнение будет иметь 4 решения, а при $k<0$ ни одного.

Арксинусом числа m $(|m| \le 1)$ называется такое число α, что: $\sin\alpha = m$ и $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Арксинус числа m обозначают: $\arcsin m$.

Заметим, что такой промежуток для α берется потому, что синус на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ принимает все свои значения ровно по одному разу.

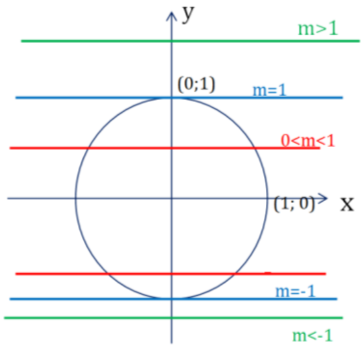
Из определения следует, что для $|m| \le 1$ $\sin(\arcsin m) = m$

С другой стороны, если $\sin\alpha = m$ и $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$.

Таким образом, получаем два простейших тождества для арксинуса.

1. $\sin(\arcsin m) = m$ для любого m: $|m| \le 1$
2. $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$ для любого α: $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Так как $\sin\alpha$ является абсциссой точки M(α) координатной окружности, то для решения уравнения $\sin\alpha = m$ нужно сначала найти на этой окружности точки, имеющие абсциссу m, то есть точки пересечения окружности с прямой x=m. Если $|m| > 1$, то таких точек нет, если $|m| = 1$, то такая точка одна, если $|m| < 1$, то таких точек две.



После отыскания этих точек нужно найти все такие числа α, которые соответствуют этим точкам. Множество таких чисел и будет решением уравнения $\sin\alpha = m$.

Пример.

Вычислить $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

Так как $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$, то $\mathrm{arsin}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

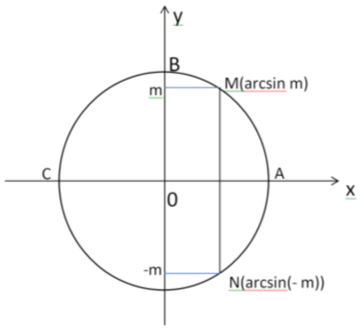
Задание.

Вычислить $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}$.

На рисунке показано, как связаны друг с другом числа m и $\arcsin m$.

Из рисунка видно, что $\arcsin(-m) = -\arcsin m$.



Запишем теперь с помощью арксинуса решение уравнения $\sin\alpha = m$.

Одним из решений уравнения является число $\alpha = \arcsin m$. Так как $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, то число $\pi - \arcsin m$ также является решением данного уравнения.

Точка $M(\arcsin m)$ соответствует всем числам вида $\arcsin m + 2\pi k, k \in Z$.

Точка $A(\pi - \arcsin m)$ соответствует всем числам вида $\pi - \arcsin m + 2\pi k, k \in Z$.

Таким образом, решением уравнения sinα=m являются все числа вида

$$a = \left[\begin{array}{l} \arcsin m + 2\pi k \\ \pi - \arcsin m + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z \quad (*)$$

Пример.

Решим уравнение $\sin\alpha = -0{,}6$

Решение:

Так как $\arcsin(-0{,}6) = -\arcsin 0{,}6$, то по формуле (*) получаем:

$$a = \left[\begin{array}{l} -arcsin0{,}6 + 2\pi k \\ \pi + arcsin0{,}6 + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z.$$

Рассмотрим решение уравнения $\sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

$arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, поэтому $2x - \frac{3\pi}{4} = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z$

Отсюда $2x = \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z$, или $2x = \left[\begin{array}{l} \frac{13\pi}{12} + 2\pi k \\ \frac{17\pi}{12} + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z$

Тогда $x = \left[\begin{array}{l} \frac{13\pi}{24} + \pi k \\ \frac{17\pi}{24} + \pi k \end{array}\right., k \in Z$

Ответ: $x = \left[\begin{array}{l} \frac{13\pi}{24} + \pi k \\ \frac{17\pi}{24} + \pi k \end{array}\right., k \in Z$.

Арктангенсом числа m называется такое число α, что: $\operatorname{tg} a = m$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Арктангенс числа m обозначают:. $\operatorname{arctg} m$

Арккотангенсом числа n называется такое число α, что: $\operatorname{ctg}\alpha = n$ и $0 < \alpha < \pi$.

Арккотангенс числа n обозначают: $\operatorname{arcctg} n$.

Решение тригонометрического уравнения *tg α= m* на первом этапе целесообразно выполнять с использованием тригонометрической окружности. Из рисунка видно, что при |m|>1, таких точек нет, при |m|=1, такая точка одна, при |m|<1, таких точек две.

Рисунок 1 – Точки пересечения прямой y = mx с тригонометрической окружностью

Рассмотрим решение уравнения $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{3}$.

Прямая $y = \sqrt{3}x$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках:

M(π/3) и N(4π/3).

Рисунок 2 – Решение уравнения $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{3}$

Эти точки соответствуют всем числа вида $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

Таким образом, решение уравнения $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{3}$ можно записать так:

$\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

Рассмотрим решение уравнения $\mathrm{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$.

Прямая $y = -\sqrt{3}x$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках:

M(5π/6) и N(-π/6).

Рисунок 3 – Решение уравнения ctgα= $-\sqrt{3}$

Эти точки соответствуют всем числа вида $\frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Таким образом, решение уравнения $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\sqrt{3}$ можно записать так:

$\alpha = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $\alpha = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Чтобы уметь решать уравнения $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{m}$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{n}$ для произвольных значений m и n, вводятся понятия арктангенса и арккотангенса.

Арктангенсом числа m называется такое число α, что: $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{m}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Арктангенс числа m обозначают: $\mathrm{arctg\,m}$

Арккотангенсом числа n называется такое число α, что: $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{n}$ и $0 < \alpha < \pi$.

Арккотангенс числа n обозначают: $\mathrm{arcctg\,n}$

Из определения следует, что $\mathrm{tg(arctg\,m) = m}$ и. $\mathrm{ctg(arcctg\,m) = m}$

Если $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{m}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\mathrm{arctg(tg}\,\alpha) = \alpha$

Два простейших тождества для арктангенса.

1. $\mathrm{tg(arctg\ m) = m}$ для любого m
2. $\mathrm{arctg(tg}\ \alpha) = \alpha$ для любого α: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Если $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{n}$ и $0 < \alpha < \pi$, то $\mathrm{arctg(tg}\,\alpha) = \alpha$.

Два простейших тождества для арккотангенса.

1. $\mathrm{ctg\ (arcctg\ n) = n}$ для любого n
2. $\mathrm{arcctg\ (ctg}\ \alpha) = \alpha$ для любого α: $0 < \alpha < \pi$.

Из рисунка видно, что $\mathrm{arctg(-m) = -arctgm}$.

Рисунок 4 – Связь между $\operatorname{arctg}(-m)$ и $\operatorname{arctg} m$

Решением уравнения $\operatorname{tg}\alpha = m$ являются все числа вида

$a = \operatorname{arctg} m + \pi k, k \in Z$.

Из рисунка видно, что $\operatorname{arcctg}(-n) = \pi - \operatorname{arcctg} n$.

Рисунок 5 – Связь между $\operatorname{arcctg}(-m)$ и $\operatorname{arcctg} m$

1.Решите уравнение $\operatorname{tg}(2-x) = \operatorname{tg}(3x+4)$.

В ответ запишите значение k, при котором x будет наименьшим положительным числом корень.

Решение:

$2 - x = 3x + 4 + \pi k, k \in Z$

$4x = -2 - \pi k, k \in Z$

$x = -0{,}5 - \frac{\pi k}{4}, k \in Z$

При $k = 0$ получаем x=-0,5

При увеличении значений k значения корня будут отрицательными. Поэтому будем рассматривать отрицательные значения k.

$k = -1 x = -0{,}5 + \frac{\pi}{4}$. Так как $\frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$, то $-0{,}5 + \frac{\pi}{4} > 0$.

При уменьшении значений k значения x будут увеличиваться.

Поэтому искомое значение k равно -1.

Ответ: -1

2.Решите уравнение $\operatorname{ctg}\left(x^2 - 6x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$. Определите, сколько решений имеет это уравнение при:

1. k=-3

Ответ: 0

1. k=0

Ответ: 2

1. k=2

Решение:

Запишем решение данного уравнения в виде:

$x^2 - 6x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

$x^2 - 6x - \pi k = 0, k \in Z$

Тогда: $x = 3 \pm \sqrt{9 + \pi k} k \in Z$

Уравнение имеет решение, если $1 + 2\pi k \geq 0$. То есть $k \geq -\frac{1}{2\pi}$, или $k \geq 0$.

Второе уравнение имеет решение, если $9 + \pi k \geq 0$. То есть $k \geq -\frac{9}{\pi}$, или $k \geq -2$.

Поэтому при $k \geq -2$ уравнение будет иметь 2 решения, а при $k < 2$ ни одного.

Ответ: 2

Практическая часть

1. Выучите определения арккосинуса, арксинуса, арктангенса.
2. Выучите формулы для решения тригонометрических уравнений.
3. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6317/main/199685/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/4736/main/199746/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/4737/main/199808/.
4. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6317/train/199689/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/4736/train/199750/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/4737/train/199812/.
5. Решите задачи:

568 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\arccos \frac{1}{2}$; 5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

569 1) $2 \arccos 0 + 3 \arccos 1$; 2) $3 \arccos (-1) - 2 \arccos 0$;
3) $12 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;
4) $4 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

570 **Сравнить числа:**
1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\arccos \frac{1}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arccos(-1)$;
3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решить уравнение (571—573).

571 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

572 1) $\cos x = \frac{3}{4}$; 2) $\cos x = -0{,}3$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

573 1) $\cos 4x = 1$; 2) $\cos 2x = -1$; 3) $\sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = -1$;
4) $2 \cos \frac{x}{3} = \sqrt{3}$; 5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

574 1) $\cos x \cos 3x = \sin 3x \sin x$;
2) $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 0$.

575 **Выяснить, имеет ли смысл выражение:**
1) $\arccos(\sqrt{6} - 3)$; 2) $\arccos(\sqrt{7} - 2)$; 3) $\arccos(2 - \sqrt{10})$;
4) $\arccos(1 - \sqrt{5})$; 5) $\operatorname{tg}\left(3 \arccos \frac{1}{2}\right)$.

576 **Решить уравнение:**
1) $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$; 2) $4 \cos^2 x = 3$;
3) $2 \cos^2 x = 1 + 2 \sin^2 x$; 4) $2\sqrt{2} \cos^2 x = 1 + \sqrt{2}$;
5) $(1 + \cos x)(3 - 2 \cos x) = 0$;
6) $(1 - \cos x)(4 + 3 \cos 2x) = 0$;
7) $(1 + 2 \cos x)(1 - 3 \cos x) = 0$;
8) $(1 - 2 \cos x)(2 + 3 \cos x) = 0$.

588 Сравнить числа:

1) $\arcsin \frac{1}{4}$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arcsin(-1)$.

Решить уравнение (589—592).

589 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

590 1) $\sin x = \frac{2}{7}$; 2) $\sin x = -\frac{1}{4}$; 3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

591 1) $\sin 3x = 1$; 2) $\sin 2x = -1$; 3) $\sqrt{2} \sin \frac{x}{3} = -1$;

4) $2 \sin \frac{x}{2} = \sqrt{3}$; 5) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$; 6) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

592 1) $\sin 4x \cos 2x = \cos 4x \sin 2x$;
2) $\cos 2x \sin 3x = \sin 2x \cos 3x$.

593 Выяснить, имеет ли смысл выражение:

1) $\arcsin(\sqrt{5} - 2)$; 2) $\arcsin(\sqrt{5} - 3)$;

3) $\arcsin(3 - \sqrt{17})$; 4) $\arcsin(2 - \sqrt{10})$;

5) $\operatorname{tg}\left(6 \arcsin \frac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение (594—596).

594 1) $1 - 4 \sin x \cos x = 0$; 2) $\sqrt{3} + 4 \sin x \cos x = 0$;

3) $1 + 6 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} = 0$; 4) $1 - 8 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} = 0$.

595 1) $1 + \cos 5x \sin 4x = \cos 4x \sin 5x$;
2) $1 - \sin x \cos 2x = \cos x \sin 2x$.

596 1) $(4 \sin x - 3)(2 \sin x + 1) = 0$;
2) $(4 \sin 3x - 1)(2 \sin x + 3) = 0$.

597 Найти все корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

Вычислить (607—608).

607 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg}(-1)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 4) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

608 1) $6 \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 4 \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $2 \operatorname{arctg} 1 + 3 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

3) $5 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - 3 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

609 Сравнить числа:

1) $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ и $\arccos \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(-3)$ и $\operatorname{arctg} 2$; 4) $\operatorname{arctg}(-5)$ и $\operatorname{arctg} 0$.

Решить уравнение (610—612).

610 1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} x = -1$; 5) $\operatorname{tg} x = 4$; 6) $\operatorname{tg} x = -5$.

611 1) $\operatorname{tg} 3x = 0$; 2) $1 + \operatorname{tg} \frac{x}{3} = 0$; 3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{6} = 0$.

612 1) $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$;
2) $(\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$;
3) $(\operatorname{tg} x - 2)(2 \cos x - 1) = 0$;
4) $(\operatorname{tg} x - 4{,}5)(1 + 2 \sin x) = 0$;
5) $(\operatorname{tg} x + 4)\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right) = 0$;

613 Найти наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения $3\ \mathrm{tg}\ x - \sqrt{3} = 0$.

614 Решить уравнение:

1) $\mathrm{arctg}\ (5x - 1) = \frac{\pi}{4}$; 2) $\mathrm{arctg}\ (3 - 5x) = -\frac{\pi}{3}$.

615 Доказать, что $\mathrm{tg}\ (\mathrm{arctg}\ a) = a$ при любом a. Вычислить:

1) $\mathrm{tg}\ (\mathrm{arctg}\ 2{,}1)$; 2) $\mathrm{tg}\ (\mathrm{arctg}\ (-0{,}3))$;

3) $\mathrm{tg}\ (\pi - \mathrm{arctg}\ 7)$; 4) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\ 6\right)$.

616 Доказать, что $\mathrm{arctg}\ (\mathrm{tg}\ \alpha) = \alpha$ при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $3\ \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\ \frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\ \mathrm{arctg}\ (\mathrm{tg}\ 0{,}5)$;

3) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\ \frac{7\pi}{8}\right)$; 4) $\mathrm{arctg}\ (\mathrm{tg}\ 13)$.

617 Вычислить:

1) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\ \frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\ \frac{3\pi}{4}\right)$;

3) $\mathrm{arctg}\left(2 \sin \frac{5\pi}{6}\right)$; 4) $\mathrm{arctg}\left(2 \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

618 Доказать, что при любом действительном значении a справедливо равенство $\cos\ (\mathrm{arctg}\ a) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$.

619 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $\mathrm{tg}\ x = 9$; 2) $\mathrm{tg}\ x = -7{,}8$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение арккосинуса.
2. Сформулируйте определение арксинуса.
3. Сформулируйте определение арктангенса.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Тригонометрические функции

Цель практического занятия

Научиться определять *D(f)* и *E(f)* тригонометрических функций вида $y=af(kx+b)+c$ и $y=|f(k|x|+b)|$. Формирование представлений о нечётной и чётной функции, о периодической функции, о наименьшем положительном периоде. Изучение свойств функции y=cos x, построение графика функции, применение полученных знаний на практике. изучение свойств и принципа построения графика функции y=sinx. познакомиться со свойствами и графиками; функции y=tgx и y=ctgx.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Овладение понятиями "область определения", "область определения тригонометрических функций", "множество значений функции", "множество значений тригонометрических функций".
2. Нахождение области определения и множества значений тригонометрических функций вида $y=af(kx+b)+c$ и $y=|f(k|x|+b)|$, где $f(x)$ - косинус, синус, тангенс или котангенс действительного числа от значения коэффициентов a, k, b.
3. Объяснение зависимости области определения и множества значений функции вида $y=af(kx+b)+c$ и $y=|f(k|x|+b)|$, где $f(x)$ - косинус, синус, тангенс или котангенс действительного числа от значения коэффициентов a, k, b.
4. Активизировать знания о чётности функций.
5. Формирование умений определять чётность и нечётность тригонометрических функций.
6. Формирование умений определять наименьший положительный период.
7. Формирование умений построения и отображения свойств графиков функции $y=cosx$.
8. Активизировать интерес к получению новых знаний.
9. Формирование точности и аккуратности при выполнении чертежей.
10. Использовать знания о свойствах $y=sinx$ в конкретных ситуациях.
11. Изучить расположение промежутков монотонности, точки наибольшего и наименьшего значения.
12. Сравнивать аналитическую и геометрическую модель функции $y=sinx$.
13. Вывести свойства функции $y=tgx$ и $y=ctgx$.
14. Объяснять зависимость свойств и графиков функций.

Областью определения функций *y = sin x* и *y = cos x* является множество *R* всех действительных чисел.

Множеством значений функции *y = sin x* и *y = cos x* является отрезок $-1 \le y \le 1$. Данные функции ограничены сверху и снизу.

Областью определения функции *y = tg x* является множество чисел $x \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in Z$.

Областью определения функции *y = ctg x* является множество чисел $x \neq \pi k,\ k \in Z$.

Множеством значений функции *y = tg x* и *y =ctg x* является множество *R* всех действительных чисел, т.к. уравнения *tg x = a* и *ctg x = a* имеют корни при любом действительном значении *a*. Функции неограниченные.

Функцию $y = f(x), x \in X$ называют чётной, если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x) = f(x)$

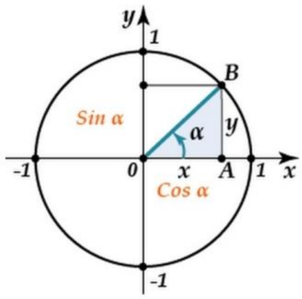
Функцию $y = f(x), x \in X$ называют нечётной, если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$

Функцию *y=f(x), x∈X* называют **чётной**, если для любого значения *x*из множества *X* выполняется равенство *f(−x)=f(x).*

Функцию *y=f(x), x∈X* называют **нечётной**, если для любого значения *x* из множества *X* выполняется равенство *f(−x)=−f(x).*

Период функций, представляющих собой сумму непрерывных и периодических функций, равен наименьшему кратному периодов слагаемых, если он существует.

Косинус (cos α) – это тригонометрическая функция от угла α между гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника, равная отношению длины прилежащего катета |OA| к длине гипотенузы |OB|.



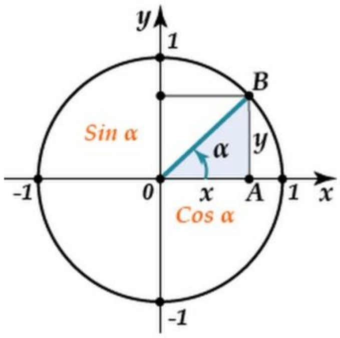
Область. определения функции (D) — множество R всех действительных чисел

Множество значений функции (E) — отрезок [-1; 1], т.е. косинус функция —ограниченная.

Для того, чтобы определить чётность функции косинус проверим следующие определения: функция **чётная**, *f(−x)=f(x) и* функцию **нечётная**, *f(−x)=−f(x).*

Например, ***cos(60°) = ½ = cos(−60°)***–это значит, что : cos(−x)=cos x для всех x∈R и ***y=cosx–чётная***

Сиинус(sin α) – это тригонометрическая функция от угла α между гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника, равная отношению длины противолежащего катета |AB| к длине гипотенузы |OB|.



Область определения функции (D) — множество R всех действительных чисел.

Множество значений функции (E) — отрезок [-1; 1], т.е. синус функция —ограниченная.

Для того, чтобы определить чётность функции синус проверим следующие определения: функция **чётная**, *f(−x)=f(x) и* функцию **нечётная**, *f(−x)=−f(x).*

Например, ***sin(30°) = ½ sin(−30°) = −½ −***это значит, что : sin(−x)=−sin (x) для всех x∈R и ***y=sinx− нечётная***

$y = tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$

$E \in (-\infty; +\infty)$

$y = tgx$ −нечётная

$y = ctgx = \frac{cos\, x}{s\, inx}$

$x \neq \pi n, n\epsilon Z$

$E \in (-\infty; +\infty)$

$y = ctgx$ −нечётная

Период функций y=sin x, y=cos хравен 2π, период функций tgx, ctgx равен π.

Пример 1. Выясним, является ли функция $y = 2 + \sin x \cos(\frac{3\pi}{2} + x)$

чётной или нечётной?

$$y = 2 + \sin x \cos(\frac{3\pi}{2} + x)$$

$$\cos(\tfrac{3\pi}{2} + x) = -\sin x$$

$$y = 2 + \sin x \sin(-x)$$

$$y = 2 + sin^2 x$$

$$(\sin(-x))^2 = sin^2 x$$

$$y(-x) = y(x)$$

$$f(x) - \text{чётная}$$

Пример 2. Доказать, что число 2π является наименьшим положительным периодом функции y=cos x

Пусть T>0 − период косинуса, т.е. для любого *x* выполняется равенство cos (x+T)= cos x. Положив *x*=0, получим cos T=1. Отсюда T=2πk, x∈R. Так как T>0, то может принимать значения 2π, 4π, 6π,..., и поэтому период не может быть меньше 2π

Амплиту́да — максимальное значение смещения или изменения переменной величины от среднего значения при колебательном или волновом движении.

Функция y=f(x) **возрастает** на интервале X, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует **большее значение функции.**

Функция y=f(x) **убывает** на интервале X, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует **меньшее значение функции.**

Точку x_0 называют **точкой максимума** функции y=f(x), если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Значение функции в точке максимума называют **максимумом функции** и обозначают y_{max}.

Точку x_0 называют **точкой минимума** функции y=f(x), если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_0) \leq f(x)$. Значение функции в точке минимума называют **минимумом функции** и обозначают y_{min}.

Напомним, что все тригонометрические функции являются **периодическими функциями**. Функции $y = sin\alpha$ и $y = cos\alpha$ повторяются через каждые 360° (или 2π радиан), поэтому 360° называется **периодом** этих функций (рис.1).

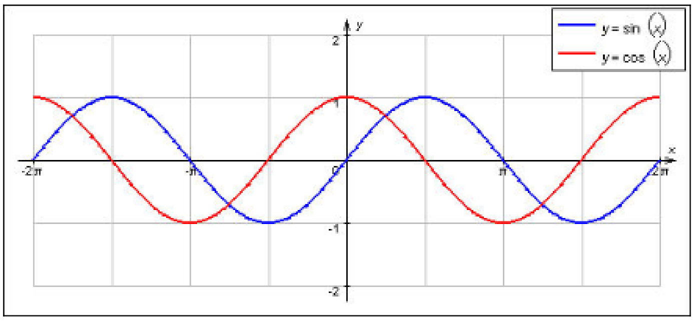


Рис. 1 – графики функций $y = sin\alpha$ и $y = cos\alpha$.

Функции $y = sin2\alpha$ и $y = cos2\alpha$ повторяются через каждые 180° (или π радиан), поэтому 180° — это период для данных функций (рис. 2).

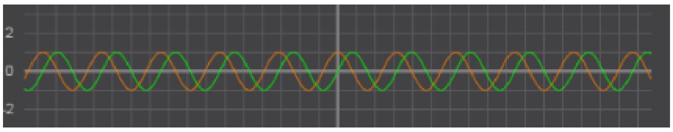


Рис. 2 – графики функций $y = sin2\alpha$ и $y = cos2\alpha$.

В общем случае если $y = sinp\alpha$ и $y = cosp\alpha$ (где p — константа), то период функции равен $\frac{360°}{p}$ (или $\frac{2\pi}{p}$ радиан). Следовательно, если $y = sin3\alpha$, то период этой функции равен $\frac{360°}{3} = 120°$, если $y = cos4\alpha$, то период этой функции равен $\frac{360°}{4} = 90°$.

Амплитудой называется максимальное значение синусоиды. Каждый из графиков 1-4 имеет амплитуду +1 (т.е. они колеблются между +1 и -1).

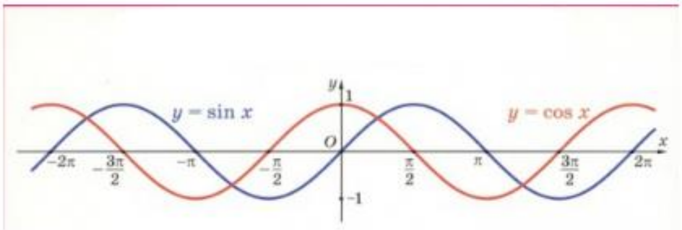


Рис. 3 – изображение амплитуды графиков $y = sin\alpha$ и $y = cos\alpha$.

Однако, если $y = 4sin\alpha$, каждая из величин $sin\alpha$ умножается на 4, таким образом, максимальная величина амплитуды — 4. Аналогично для $y = 5cos2\alpha$ амплитуда равна 5, а период — $\frac{360°}{2} = 180°$.

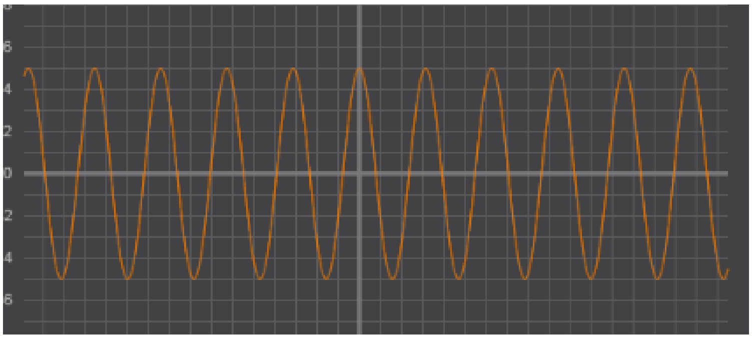


Рис. 4 – график функции $y = 5cos2\alpha$.

Свойства функции $y = cosx$:

1. Область определения - множество R всех действительных чисел.
2. Множество значений - отрезок [−1;1].
3. Функция $y = cosx$ периодическая, T=2π.
4. Функция $y = cosx$ - чётная
5. Функция $y = cosx$ принимает:

значение, равное 0, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;
наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n, n \in Z$
наименьшее значение, равное −1, при $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$;
положительные значения на интервале $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n, n \in Z$;
отрицательные значения на интервале $(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2})$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n, n \in Z$.

1. Функция $y = cosx$:

возрастает на отрезке [π;2π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n, n \in Z$;
убывает на отрезке [0;π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n, n \in Z$.

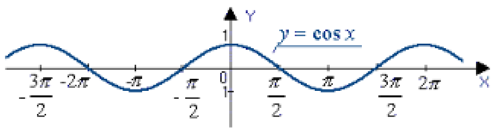
Интересно, что графиками тригонометрических функций –косинус и синус описываются многие процессы в нашей жизни. Например, работа сердца. Сделанная электрокардиограмма (ЭКГ) представляет собой график синусоиды, отражающую биоэлектрическую активность сердца. Или еще пример, электромагнитные волны к ним относятся: мобильные телефоны, беспроводная связь, радио, СВЧ-печи тоже распространяются по закону синуса или косинуса. Их существование было предсказано английским физиком Дж.Максвеллом в 1864 году.

Актуализация знаний

Напомним, что множество значений функции *y=cosx* принадлежит отрезку [−1;1], определена данная функция на всей числовой прямой и, следовательно, функция ограничена и график её расположен в полосе между прямыми *y=−1* и *y=1*.

Так как функция периодическая с периодом 2π, то достаточно построить её график на каком-нибудь промежутке длиной 2π, например на отрезке $-\pi \le x \le \pi$. Тогда на промежутках, полученных сдвигами выбранного отрезка на $2\pi n, n \in Z$, график будет таким же.

Функция $y = cosx$ является чётной. Поэтому её график симметричен относительно оси Оу. Для построения графика на отрезке $-\pi \le x \le \pi$ достаточно построить для $0 \le x \le \pi,$ а затем симметрично отразить его относительно оси Оу (рис. 5)



Пример 1. Найдем все корни уравнения $cos\,cos\,x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \le x \le 2\pi$.

Построим графики функций $y = cosx$ и $y = \frac{1}{2}$ (рис. 6)

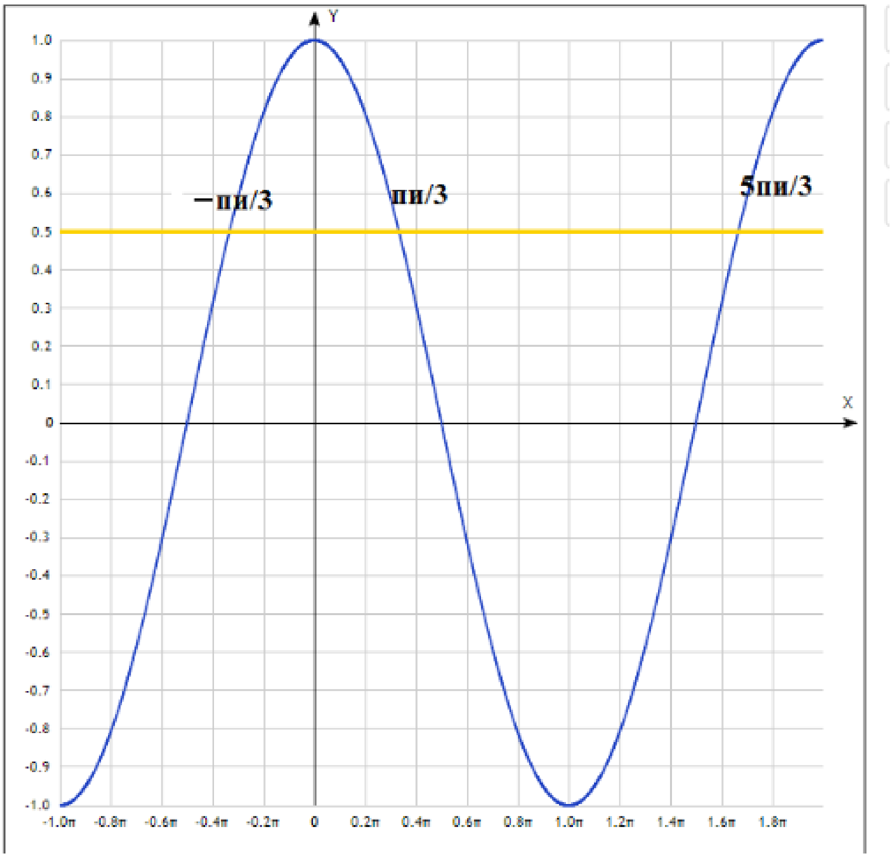


Рис. 6 – графики функций $y = cosx$ и $y = \frac{1}{2}$.

Графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $cos\,cos\,x = \frac{1}{2}$. На отрезке от $[0, \pi]$ корнем уравнения является число $x_1 = arccos\,arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. Из рисунка видно, что точки x_1 и x_2 симметричны относительно оси Оу, следовательно $x_2 = -\frac{\pi}{3}$. А $x_3 = x_2 + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$.

Пример 2.Найти все решения неравенства $\cos\cos x < \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \le x \le 2\pi$.

Из рисунка 6 видно, что график функции $y = \cos x$ лежит ниже графика функции $y = \frac{1}{2}$ на промежутках $[-\pi; -\frac{\pi}{3})$ и $(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3})$.

Ответ: $-\pi \le x < -\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.

Синусоидой называется множество точек плоскости, которое в некоторой системе координат является графиком функции $y = \sin x$, где a≠0.

Число $|a|$ называется **амплитудой.**

Свойства функции $y = \sin x$:

1) D(y) =R;

2) E (y) =[−1;1];

3) Период функции равен 2π ;

4) Функция чётная/нечётная;

5) Функция $y = \sin x$ принимает:

значение, равное 0, при $x = 2\pi n, n\epsilon Z$;
наименьшее значение, равное −1, при $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, n\epsilon Z$;
наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{1}{2}\pi + 2\pi n, n\epsilon Z$;
положительные значения на интервале $(0;\pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n, n \in Z$;
отрицательные значения на интервале $(\pi; 2\pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n, n \in Z$.

6) Функция $y = \sin x$

возрастает на отрезке $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $\pi n, n \in Z$;
убывает на отрезке $(\frac{\pi}{2}; 2\pi)$и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $\pi n, n \in Z$.

Изменяя амплитуду и значение аргумента функции синуса график ведет себя следующим образом (рис.1)

Рис. 1 – графики синуса

Сдвиг графика влево/вправо вдоль оси абсцисс

Если к аргументу функции добавляется постоянная, то происходит сдвиг (параллельный перенос) графика вдоль оси Ох.

Правило:
1) чтобы построить график функции $y = sin(x + b)$, нужно сдвинуть график вдоль оси Ох на b единиц влево;

2) чтобы построить график функции $y = sin(x - b)$, нужно график сдвинуть вдоль оси ОХ на b единиц вправо.

Пример 1. Найдем все корни уравнения $x = -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

Построим графики функций $y = \sin x$ и $y =-\frac{1}{2}$ (рис. 6)

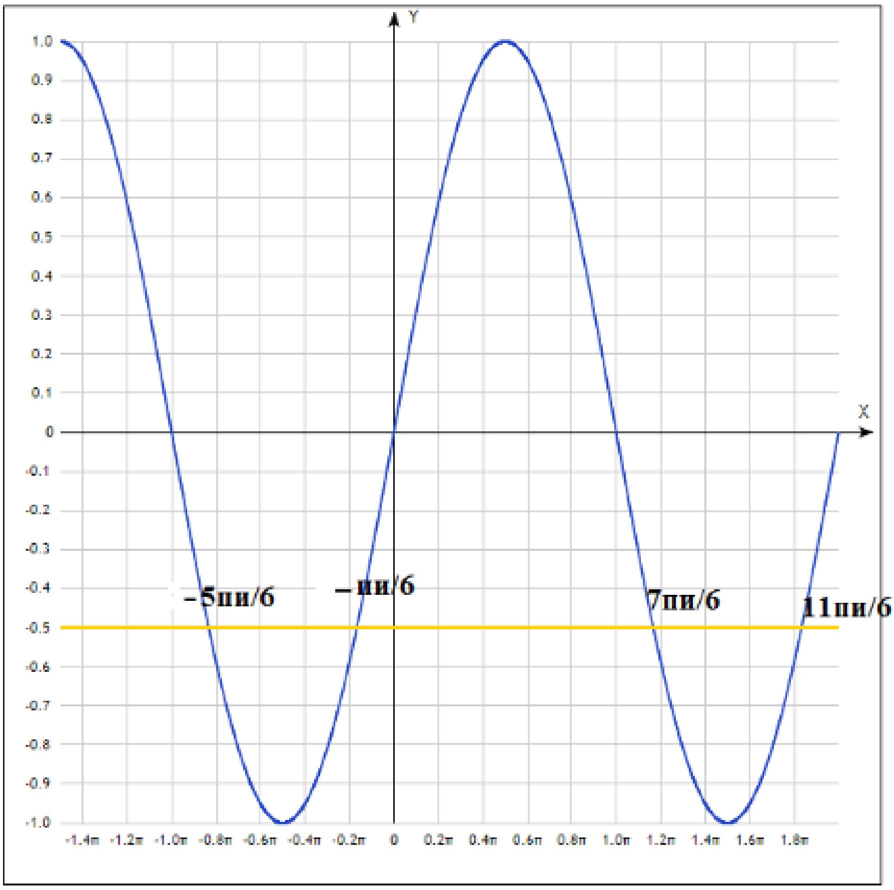


Рис. 7 – графики функций $y = sinx$ и $y =-\frac{1}{2}$.

Графики пересекаются в четырёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3, x_4 являются корнями уравнения $sinx= -\frac{1}{2}$. На выбранном отрезке от $[-\pi; 2\pi]$ корни уравнения симметричны: $x_1 = x_3$ и $x_2 = x_4$. Из рисунка видно, что симметричность корней объясняется периодичностью функции: $x_1 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6} = x_3$ аналогично для x_2 и x_4.

Ответ: $x_1 = -\frac{5\pi}{6}$; $x_3 = \frac{7\pi}{6}$; $x_2 = -\frac{\pi}{6}$; $x_3 = \frac{11\pi}{6}$.

Пример 2. Найти все решения неравенства $\sin x > -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \le x \le 2\pi$.

Из рисунка 7 видно, что график функции $y = \sin x$ лежит выше графика функции $y = -\frac{1}{2}$ на промежутках $[-\pi; -\frac{5\pi}{6})$ и $(-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6})$ и $(\frac{11\pi}{6}; 2\pi]$

Ответ: $-\pi \le x < -\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6} < x \le 2\pi$

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Тангенсоида – график функции y = tgx; плоская кривая, изображающая изменение тангенса в зависимости от изменения его аргумента (угла).

Изучение свойств функции y=tgx начнем с построения графика. Обратимся к единичной окружности:

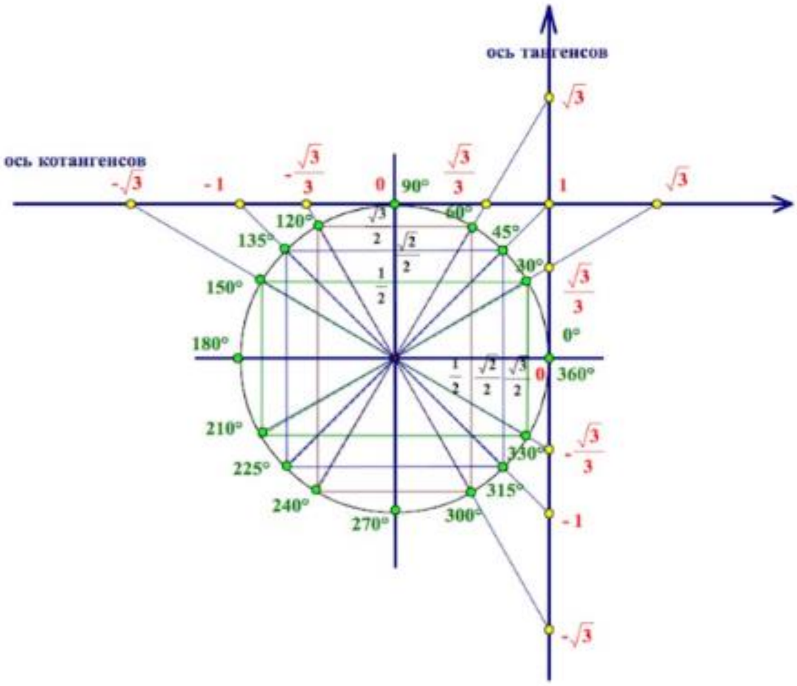


рис.1 Тригонометрический круг

Переносим основные значения углов на координатную плоскость. По оси абсцисс откладываем угол в радианах, по оси ординат – значения тангенса угла.

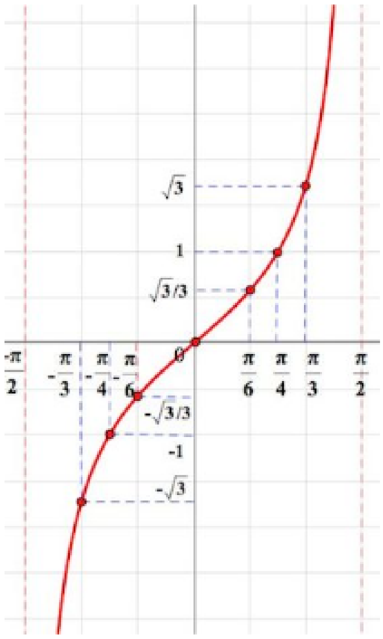


рис.2 График y=tgx на промежутке $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

Как любая тригонометрическая функции, функция тангенса периодическая, делая параллельный перенос получаем:

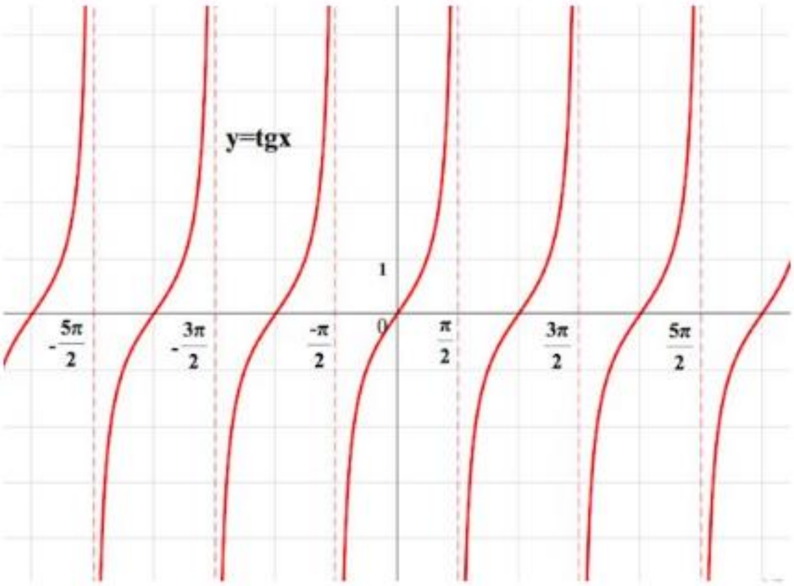


рис.3 График y=tgx

Заметим, что график симметричен относительно начала координат, следовательно функция тангенса нечётная. Используя построенный нами график, выведем **основные свойства y=tgx:**

1. Область определения функции y = tgx все действительные числа, кроме чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

2. Функция периодическая с периодом , т.к. $tg(x - \pi) = tgx = tg(x + \pi);$

3. Функция нечётная, т.к. $tg(-x) = -tgx$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат;

4. Функция возрастает на всём интервале;

5. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху. Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6. $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

7. Функция $y = tgx$ принимает:

значение, равное 0, при $x = \pi n, n \epsilon Z$;
положительные значения на интервале $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in Z$;
отрицательные значения на интервале $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n), n \in Z$.

Для построения графика $y = ctg\,x$ можно придерживаться алгоритму рассмотренному при построении графика $y = tg\,x$, однако $-tg(\frac{\pi}{2} + x) = ctgx$ (формула приведения). Т.е. смещая тангенсоиду на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево и делаем симметрию относительно оси Ох за счёт коэффициента −1, получаем:

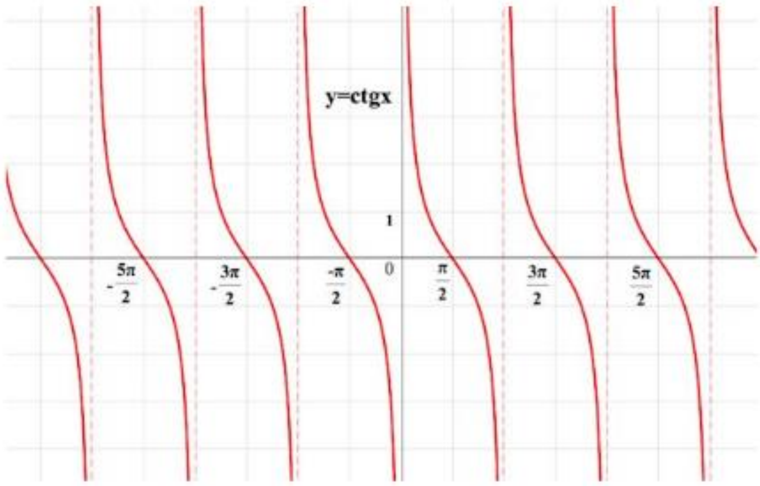


рис.3 График y=ctgx

Основные свойства y=ctgx:

1. Область определения функции y = ctgx все действительные числа, кроме чисел вида $x = \pi n, n \in Z$;

2. Функция периодическая с периодом π;

3. Функция нечётная. График нечётной функции симметричен относительно начала координат;

4. Функция убывает на всём интервале;

5. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху. Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Пример 1.

Найдем все корни уравнения $tgx = 1$, принадлежащие отрезку $-\pi \le x \le 2\pi$.

Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$ (рис. 6)

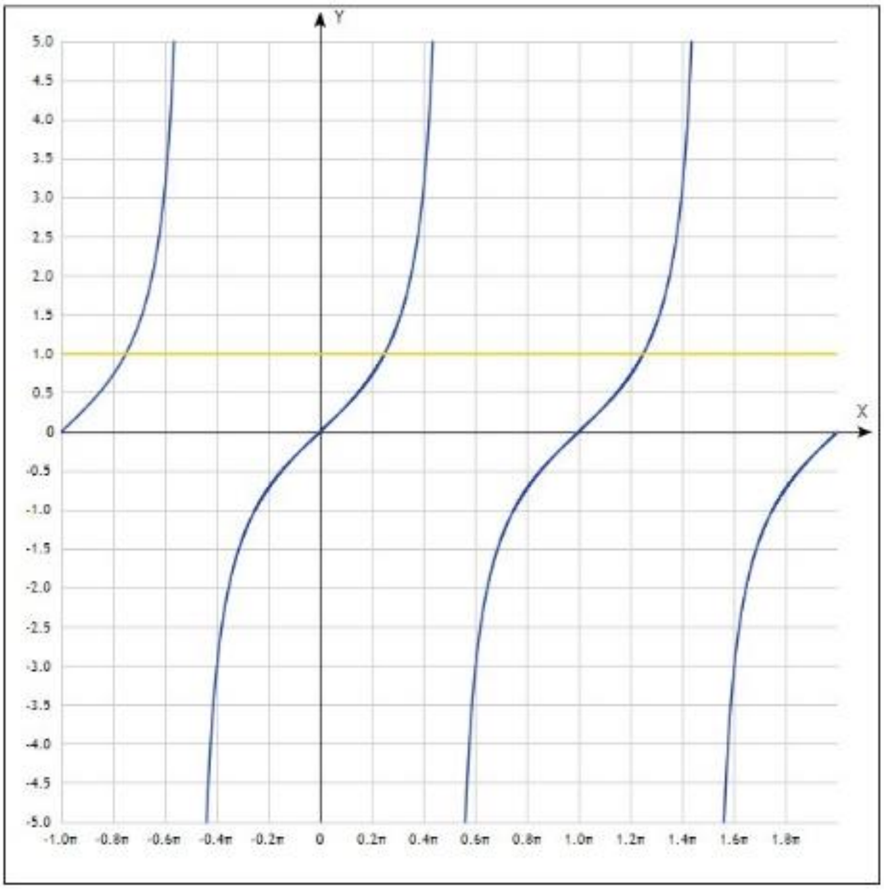


Рис. 4 – графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$.

Графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $tgx = 1$. $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6}$; $x_3 = -\frac{3\pi}{4}$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6}$; $x_3 = -\frac{3\pi}{4}$

Пример 2. Найти все решения неравенства $ctgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$, принадлежащие отрезку $-\pi \le x \le 2\pi$.

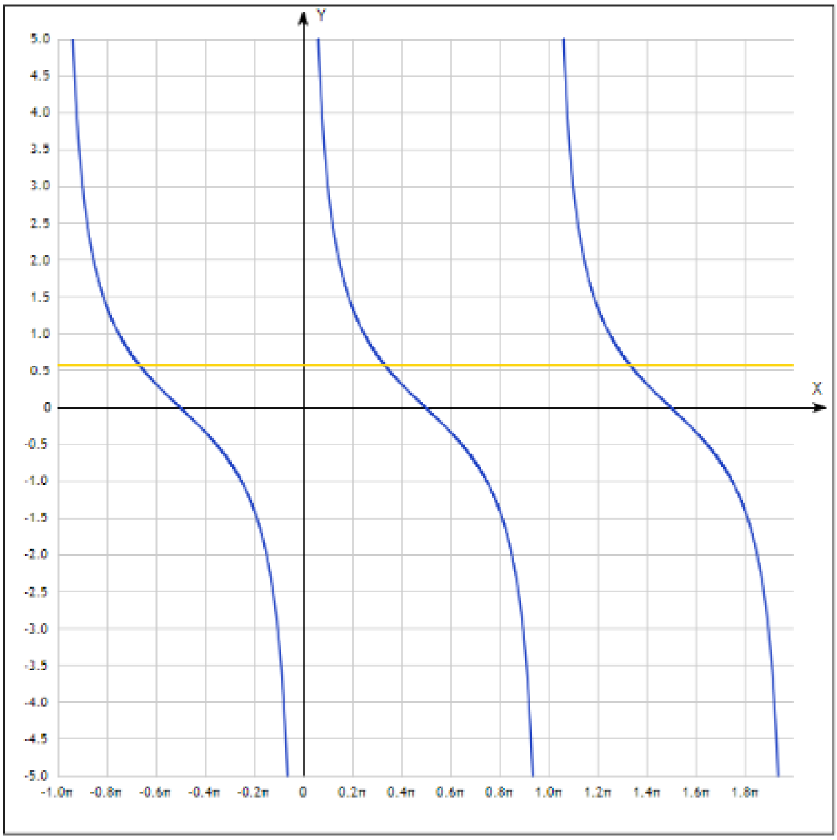


рис.5 графики функций $y = \text{tg}\, x$ и $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $ctgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $x_1 = \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{4\pi}{3}$; $x_3 = -\frac{2\pi}{3}$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{4\pi}{3}$; $x_3 = -\frac{2\pi}{3}$

Практическая часть

1. Выучите определения области определения функции, области значения функции, амплитуды, чётности, нечётности.
2. Выучите способы преобразования графиков функций.
3. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6111/main/200549/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/3923/main/200611/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/4920/main/200706/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/5570/main/200799/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/3943/main/200826/.
4. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6111/train/200553/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/3923/train/200617/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/4920/train/200710/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/5570/train/200802/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/3943/train/200833/.
5. Решите задачи:

691 Найти область определения функции:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \cos \frac{x}{2}$; 3) $y = \cos \frac{1}{x}$;

4) $y = \sin \frac{2}{x}$; 5) $y = \sin \sqrt{x}$; 6) $y = \cos \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

692 Найти множество значений функции:

1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = 1 - \cos x$;

Найти область определения функции (**693—695**).

693 1) $y = \frac{1}{\cos x}$; 2) $y = \frac{2}{\sin x}$; 3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; 4) $y = \operatorname{tg} 5x$.

694 1) $y = \sqrt{\sin x + 1}$; 2) $y = \sqrt{\cos x - 1}$; 3) $y = \lg \sin x$;

4) $y = \sqrt{2 \cos x - 1}$; 5) $y = \sqrt{1 - 2 \sin x}$; 6) $y = \ln \cos x$.

695 1) $y = \frac{1}{2 \sin^2 x - \sin x}$; 2) $y = \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$;

3) $y = \frac{1}{\sin x - \sin 3x}$; 4) $y = \frac{1}{\cos^3 x + \cos x}$.

696 Найти множество значений функции:

1) $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x$; 2) $y = 1 - 8 \cos^2 x \sin^2 x$;

3) $y = \frac{1 + 8 \cos^2 x}{4}$; 4) $y = 10 - 9 \sin^2 3x$;

5) $y = 1 - 2 |\cos x|$; 6) $y = \sin x + \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.

697 Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 3 \cos 2x - 4 \sin 2x.$$

698 Найти множество значений функции $y = \sin x - 5 \cos x$.

699 Найти множество значений функции

$$y = 10 \cos^2 x - 6 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x.$$

Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной (**700—701**).

700 1) $y = \cos 3x$; 2) $y = 2 \sin 4x$; 3) $y = \frac{x}{2} \operatorname{tg}^2 x$;

4) $y = x \cos \frac{x}{2}$; 5) $y = x \sin x$; 6) $y = 2 \sin^2 x$.

701 1) $y = \sin x + x$; 2) $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - x^2$;

3) $y = 3 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \sin (\pi - x)$;

4) $y = \frac{1}{2} \cos 2x \sin \left(\frac{3}{2} \pi - 2x \right) + 3$;

5) $y = \frac{\sin x}{x} + \sin x \cos x$; 6) $y = x^2 + \frac{1 + \cos x}{2}$.

702 Доказать, что функция $y = f(x)$ является периодической с периодом 2π, если:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = \sin x + 1$; 3) $y = 3 \sin x$;

4) $y = \frac{\cos x}{2}$; 5) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$; 6) $y = \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)$.

703 Доказать, что функция $y = f(x)$ является периодической с периодом T, если:

1) $y = \sin 2x$, $T = \pi$; 2) $y = \cos \frac{x}{2}$, $T = 4\pi$;

3) $y = \operatorname{tg} 2x$, $T = \frac{\pi}{2}$; 4) $y = \sin \frac{4x}{5}$, $T = \frac{5}{2} \pi$.

704 Определить, является ли данная функция чётной или нечётной:

1) $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{1 + \cos 2x}$;

3) $y = \dfrac{\cos 2x - x^2}{\sin x}$; 4) $y = \dfrac{x^3 + \sin 2x}{\cos x}$;

5) $y = 3^{\cos x}$; 6) $y = x\,|\sin x|\,\sin^3 x$.

709 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на отрезке:

1) $[3\pi;\ 4\pi]$; 2) $[-2\pi;\ -\pi]$; 3) $\left[2\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$;

4) $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right]$; 5) $[1;\ 3]$; 6) $[-2;\ -1]$.

710 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \cos x$ возрастала, а на другом убывала:

1) $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[0;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\pi;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

711 Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \cos x$, сравнить числа:

1) $\cos\dfrac{\pi}{7}$ и $\cos\dfrac{8\pi}{9}$; 2) $\cos\dfrac{8\pi}{7}$ и $\cos\dfrac{10\pi}{7}$;

3) $\cos\left(-\dfrac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos\left(-\dfrac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\dfrac{9\pi}{7}\right)$;

5) $\cos 1$ и $\cos 3$; 6) $\cos 4$ и $\cos 5$.

712 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\cos x = \dfrac{1}{2}$; 2) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

713 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$; 2) $\cos x \geqslant -\dfrac{1}{2}$;

3) $\cos x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

717 Построить график функции и выяснить её свойства:

1) $y = 1 + \cos x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = 3\cos x$.

718 Найти множество значений функции $y = \cos x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\dfrac{\pi}{3};\ \pi\right]$; 2) $\left(\dfrac{5\pi}{4};\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

719 Построить график функции:

1) $y = |\cos x|$; 2) $y = 3 - 2\cos(x - 1)$.

720 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \sin x$ принимает:
1) значение, равное 0, 1, -1;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

721 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \sin x$ на промежутке:

1) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;
4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 5) $[2; 4]$; 6) $(6; 7)$.

722 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ возрастала, а на другом убывала:

1) $[0; \pi]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; 3) $[-\pi; 0]$; 4) $[-2\pi; -\pi]$.

725 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

726 Выразив косинус через синус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\sin \frac{\pi}{9}$ и $\cos \frac{\pi}{9}$; 2) $\sin \frac{9\pi}{8}$ и $\cos \frac{9\pi}{8}$;
3) $\sin \frac{\pi}{5}$ и $\cos \frac{5\pi}{14}$; 4) $\sin \frac{\pi}{8}$ и $\cos \frac{3\pi}{10}$.

727 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$:

1) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

729 Построить график функции и выяснить её свойства:
1) $y = 1 - \sin x$; 2) $y = 2 + \sin x$;
3) $y = \sin 3x$; 4) $y = 2 \sin x$.

730 Найти множество значений функции $y = \sin x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

731 Построить график функции:
1) $y = \sin |x|$; 2) $y = |\sin x|$.

732 Сила переменного электрического тока является функцией, зависящей от времени, и выражается формулой
$$I = A \sin (\omega t + \varphi),$$
где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза. Построить график этой функции, если:

1) $A = 2$, $\omega = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 2) $A = 1$, $\omega = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

733 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x из промежутка $[-\pi; 2\pi]$ функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает:
1) значение, равное 0; 2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

734 (Устно.) Выяснить, является ли функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастающей на промежутке:
1) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $[2; 3]$.

735 С помощью свойства возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$ сравнить числа:
1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$ и $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;
4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 5) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{tg} 3$; 6) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1{,}5$.

744 Построить график функции и выяснить её свойства:
1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

745 Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$, если x принадлежит промежутку:
1) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $(0; \pi)$; 4) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Построить график функции (**746—748**).

746 1) $y = \operatorname{tg}|x|$; 2) $y = |\operatorname{tg} x|$; 3) $y = \operatorname{ctg} x$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

747 1) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; 2) $y = \sin x \operatorname{ctg} x$.

748 1) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$.

749 Решить неравенство:
1) $\operatorname{tg}^2 x < 1$; 2) $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 3$; 3) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.

Контрольные вопросы:

1. Чему равен период функции y=sinx?.
2. Чему равен период функции y=tgx?.
3. Приведите пример чётной функции.
4. Приведите пример нечётной функции.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Степенная функция

Цель практического занятия
Получить знания о степенной и дробно-рациональной функции.

Методический материал
Изучаемые вопросы:
3. Понятие степенной функции с натуральными показателями.
4. Основные свойства функций $y = x^{2n}$ и $y = x^{2n+1}$.
5. Понятия взаимно обратной и дробно-линейной функций.

Определение. Функция вида $y = x^n$, где n- любое действительное число, называют степенной функцией.

Определение. Функцию y=f(x), x∈X называют обратимой, если любое своё значение она принимает только в одной точке множества X (иными словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции).

Определение. Функция вида $y=x^n$, где n- любое действительное число, называют степенной функцией.

С некоторыми из таких функций вы уже познакомились в курсе алгебры 7-9 классов Это, например, функции $y=x^1=x$, $y=x^2$, $y=x^3$. При произвольном натуральном n графики и свойства функции $y=x^n$ аналогичны известным графикам и свойствам указанных функций.

Если показатель степени n — натуральное число, то степенная функция задаётся формулой $y=x^n$.

При n=1, $y=x^1$ или y=x — прямая (Рисунок 1).

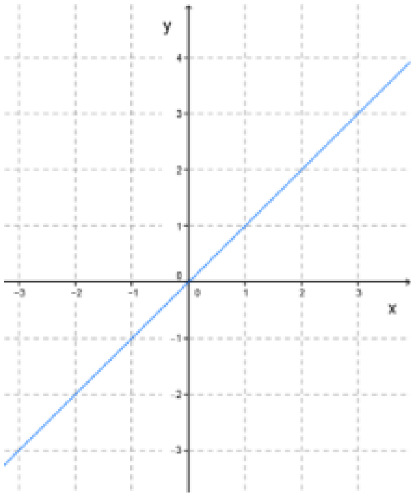


Рисунок 1 – график функции $y=x^1$

При n=2, $y=x^2$ — парабола.

При n=3, $y=x^3$ — кубическая парабола.

График степенной функции $y=x^n$, где n — чётное число (4,6,8...), принимает вид параболы.

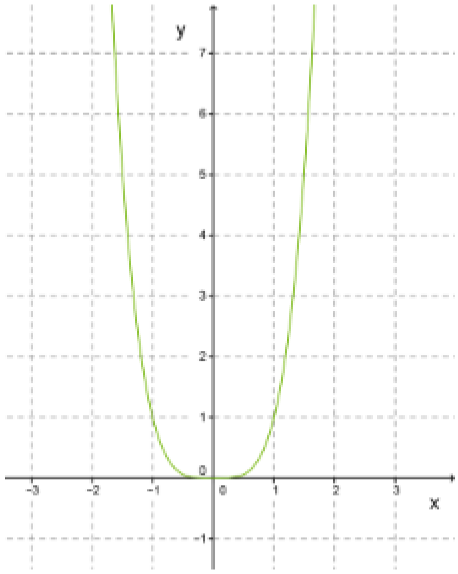


Рисунок 2 – график функции $y=x^n$, где n — чётное число

График степенной функции $y=x^n$, где n — нечётное число (5,7,9...), принимает вид кубической параболы.

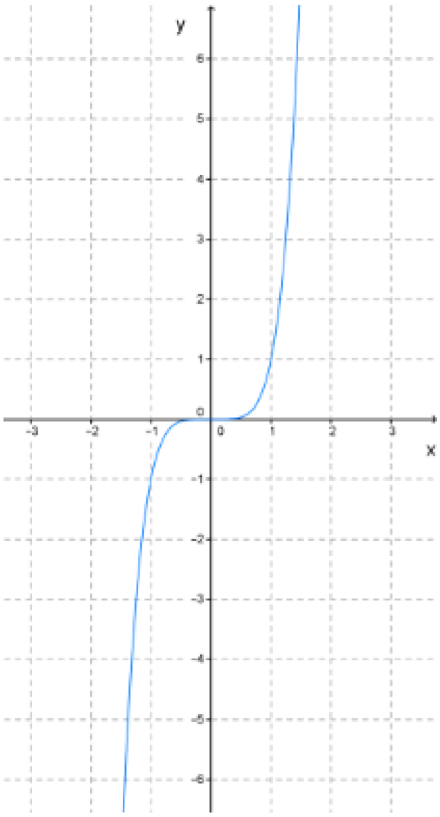


Рисунок 3 – график функции $y=x^n$, где n — нечётное число

Если показатель степени — целое отрицательное число, то степенная функция задаётся формулой $y=x^{-n}$ или $y=1/x^n$.

График степенной функции $y=x^{-n}$, в случае, когда n — **чётное число** (4,6,8...), принимает вид:

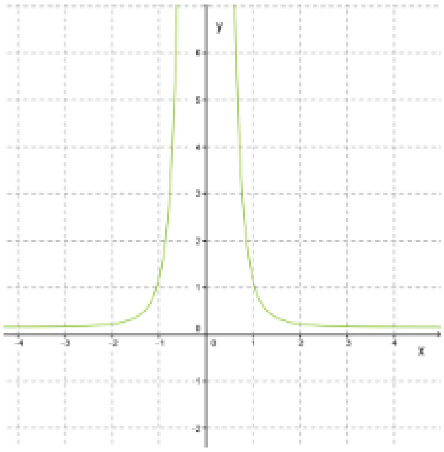


Рисунок 4 – график функции $y=x^{-n}$, при n — чётное число

Например, такой вид принимают графики функций $y=x^{-4}$,$y=x^{-8}$.

График степенной функции $y=x^{-n}$, в случае, когда n — **нечётное число** (5,7,9...), принимает вид гиперболы:

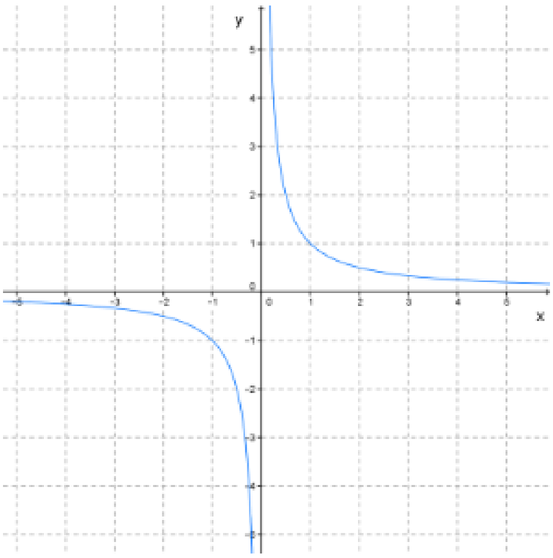


Рисунок 5 – график функции $y=x^{-n}$, при n — нечётное число

Например, такой вид принимают графики функций $y=x^{-5}$,$y=x^{-11}$.

Функции такого вида называются дробно-линейными.

Рассмотрим графики степенных функций $y=x^{m/n}$ с **положительным дробным показателем** m/n.

1. Степенная функция $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 1$ > **неправильная дробь** (числитель больше знаменателя).

График — ветвь параболы:

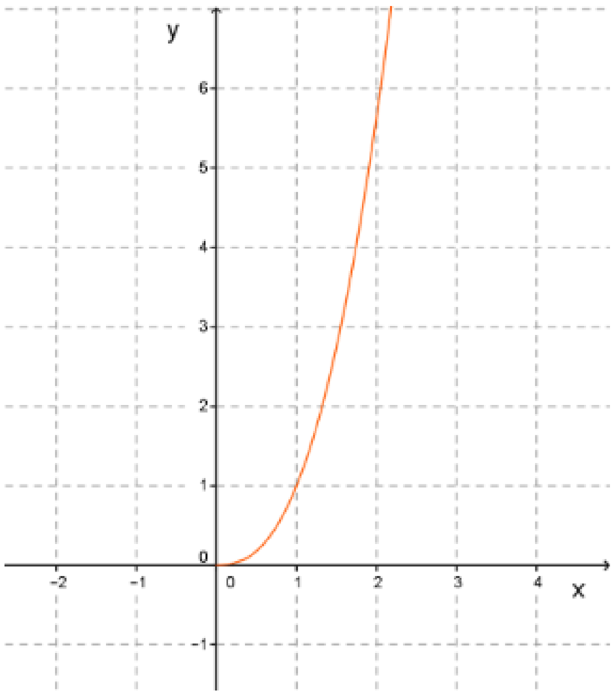


Рисунок 6 – $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 1$

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 1$

1.D(f)=[0;+∞);

2.E(f)=[0;+∞);

3. не является ни чётной, ни нечётной;

4. возрастает при x∈[0;+∞);

5. не имеет наибольшего значения, $y_{наим}$=0;

6. не ограничена сверху, ограничена снизу;

7. выпукла вниз;

8. непрерывна.

2. Степенная функция $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$ — **правильная дробь** (числитель меньше знаменателя).

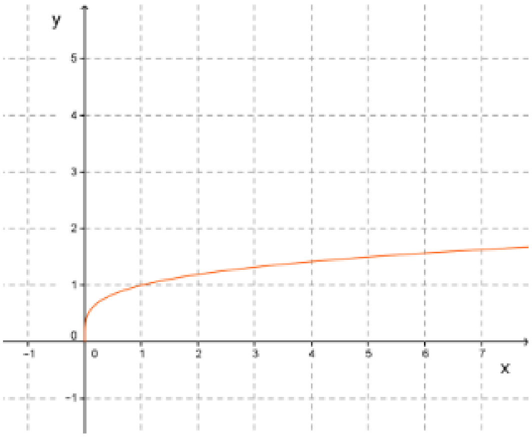


Рисунок 7 - функция $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$

1.D(f)=[0;+∞);

2.E(f)=[0;+∞);

3. не является ни чётной, ни нечётной;

4. возрастает при x∈[0;+∞);

5. не имеет наибольшего значения, $y_{наим}$=0;

6. не ограничена сверху, ограничена снизу;

7. выпукла вверх;

8. непрерывна.

Рассмотрим степенные функции с **отрицательным дробным показателем** степени $y = x^{-\frac{m}{n}}$

График — ветвь гиперболы.

Рисунок 8 - функция $y = x^{-\frac{m}{n}}$

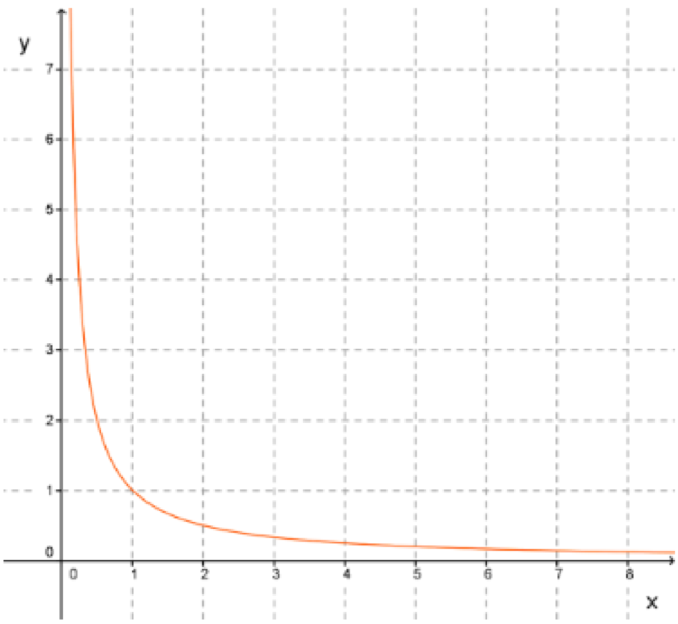


Рисунок 8 - функция $y = x^{-\frac{m}{n}}$

График имеет горизонтальную асимптоту *y*=0 и вертикальную асимптоту *x*=0.

Свойства функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$.

1.D(f)=(0;+∞);

2.E(f)=(0;+∞);

3. не является ни чётной, ни нечётной;

4. убывает при x∈(0;+∞);

5. не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;

6. не ограничена сверху, ограничена снизу;

7. выпукла вниз;

8. непрерывна.

Итак, на основании всего вышеперечисленного, можно сделать вывод в виде таблицы:

Функция $y = x^p$	Область определения	Множество значений	Чётность, нечётность	Возрастание	Убывание
$p = 2n$, $n \in N$	R	$y \geqslant 0$	чётная	$x \geqslant 0$	$x \leqslant 0$
$p = 2n - 1$, $n \in N$	R	R	нечётная	$x \in R$	—
$p = -2n$, $n \in N$	R, $x \neq 0$	$y > 0$	чётная	$x < 0$	$x > 0$
$p = -(2n - 1)$, $n \in N$	R, $x \neq 0$	R, $y \neq 0$	нечётная	—	$x < 0$, $x > 0$
$p > 0$, $p \in R$, p — нецелое	$x \geqslant 0$	$y \geqslant 0$	—	$x \geqslant 0$	—
$p < 0$, $p \in R$, p — нецелое	$x > 0$	$y > 0$	—	—	$x > 0$

Таблица 1 - вывод

Рассмотрим еще одну функцию.

Определение. Функцию y=f(x), x∈X называют обратимой, если любое своё значение она принимает только в одной точке множества X (иными словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции).

Теорема 1

Если функция y=f(x), x∈X монотонна на множестве X, то она обратима.

Теорема 2

Если функция y=f(x) возрастает (убывает) на множестве X, а Y - область значений функции, то обратная функция $x=f^{-1}(y)$,y∈Y возрастает (убывает) на множестве Y.

Теорема 3

Точки M(a;b) и P(b;a) симметричны относительно прямой y=x.

Нахождение формулы для функции, обратной данной

Пользуясь формулой y=f(x), следует выразить x через y, а в полученной формуле x=g(y) заменить x на y, а y на x.

Пример:

Дана функция $y=x^2$, x∈[0;+∞). Найти обратную функцию.

Заданная функция возрастает на промежутке [0;+∞), значит, она имеет обратную функцию. Из уравнения $y=x^2$ находим: $x=\sqrt{y}$ или $x=-\sqrt{y}$. Промежутку [0;+∞) принадлежат лишь значения функции $x=\sqrt{y}$. Это и есть обратная функция, которая определена на промежутке [0;+∞).

Поменяв местами x и y, получим: $y=x$, x∈[0;+∞). График этой функции получается из графика функции $y=x^2$, x∈[0;+∞) с помощью симметрии относительно прямой y=x.

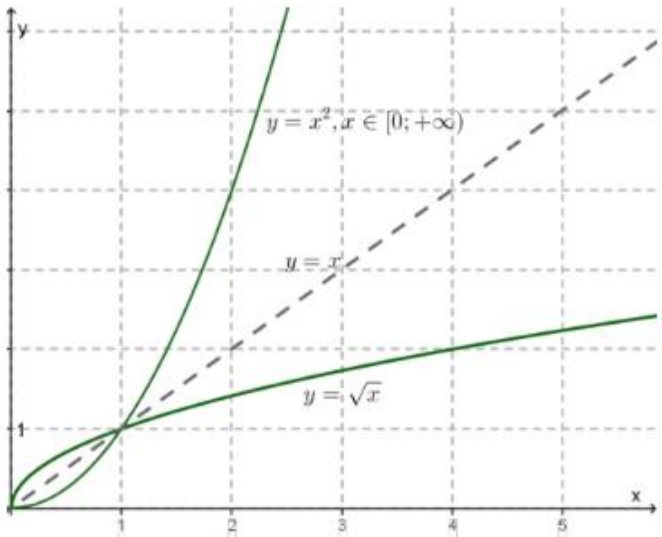


Рисунок 9 – график функции, обратной $y=x^2$

№1.

Изобразите схематически график функции $y = \frac{-4}{x+4}$

Графиком данной функции является гипербола.

Возьмем точки:

X	-3	-5	-2	-6	0	-8
y	-4	4	-2	2	-1	1

Верный ответ:

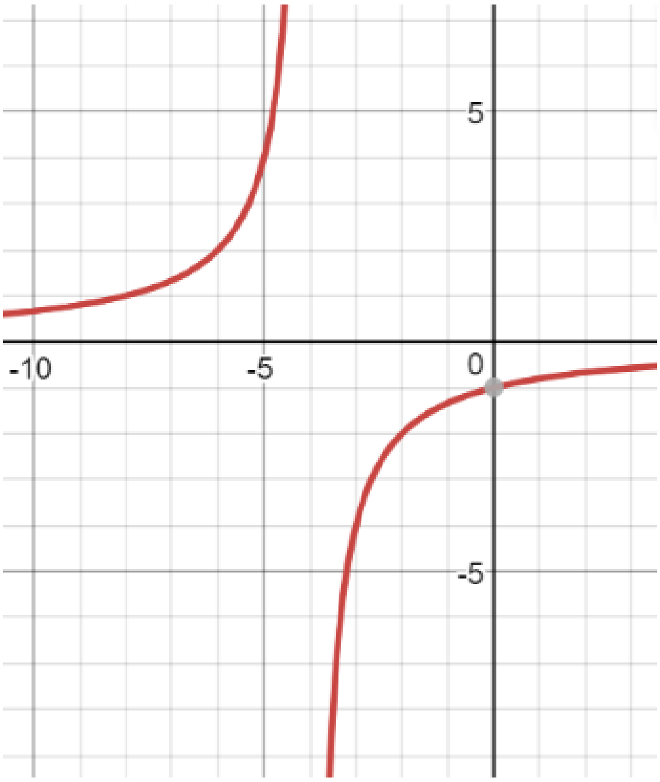


Рисунок 10 – график функции $y = \frac{-4}{x+4}$

№2. Выделите возрастающую функцию $y = x^p$ при x>0, если

1. p=8
2. p=-9
3. p= -5
4. p=-3
5. p=4
6. p=11

Применим данную таблицу к решению нашего задания

Функция $y = x^p$	Область определения	Множество значений	Чётность, нечётность	Возрастание	Убывание
$p = 2n$, $n \in N$	R	$y \geq 0$	чётная	$x \geq 0$	$x \leq 0$
$p = 2n - 1$, $n \in N$	R	R	нечётная	$x \in R$	—
$p = -2n$, $n \in N$	R, $x \neq 0$	$y > 0$	чётная	$x < 0$	$x > 0$
$p = -(2n - 1)$, $n \in N$	R, $x \neq 0$	R, $y \neq 0$	нечётная	—	$x < 0$, $x > 0$
$p > 0$, $p \in R$, p — нецелое	$x \geq 0$	$y \geq 0$	—	$x \geq 0$	—
$p < 0$, $p \in R$, p — нецелое	$x > 0$	$y > 0$	—	—	$x > 0$

Таблица 1 – выводы

При p>0 функция возрастает.

Соответственно, верный ответ:

1. p=8
2. p=-9
3. p= -5
4. p=-3
5. p=4
6. p=11

Практическая часть

1. Выучите определения степенной функции.
2. Выучите определение обратной функции.
3. Выучите определение дробно-линейной функции.
4. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/5540/main/327003/,
5. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/5540/train/327007/,
6. Решите задачи:

119 Изобразить схематически график функции и указать её область определения и множество значений; выяснить, является ли функция ограниченной сверху (снизу):

1) $y = x^6$; 2) $y = x^5$; 3) $y = x^7$;

4) $y = x^{-2}$; 5) $y = x^{-3}$; 6) $y = x^6$.

120 (Устно.) Выяснить, является ли функция $y = x^p$ возрастающей (убывающей) при $x > 0$, если:

1) $p = 7$; 2) $p = 16$; 3) $p = -3$;

4) $p = -7$; 5) $p = -4$; 6) $p = -10$?

121 Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

1) $y = x^4$, $x \in [-1; 2]$; 2) $y = x^7$, $x \in [-2; 3]$;

3) $y = x^{-1}$, $x \in [-3; -1]$; 4) $y = x^{-2}$, $x \in [1; 4]$.

122 Пользуясь свойствами степенной функции, сравнить с единицей:

1) $4{,}1^{12}$; 2) $0{,}2^3$; 3) $0{,}7^9$; 4) $(\sqrt{3})^{22}$; 5) $1{,}3^{-2}$; 6) $0{,}8^{-1}$.

123 Построить график функции, указать её область определения и множество значений. Выяснить, является ли функция возрастающей (убывающей), является ли функция ограниченной, принимает ли она наибольшее (наименьшее) значение:
1) $y = -(x-2)^3 - 1$; 2) $y = (x+3)^4 + 2$.

124 Сравнить значения выражений:

1) $3{,}1^7$ и $4{,}3^7$; 2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^3$;

3) $0{,}3^8$ и $0{,}2^8$; 4) $2{,}5^2$ и $2{,}6^2$;

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$; 6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-6}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{-6}$;

7) $(4\sqrt{3})^{-3}$ и $(3\sqrt{4})^{-3}$; 8) $(2\sqrt[3]{6})^{-5}$ и $(6\sqrt[3]{2})^{-5}$.

125 В одной системе координат построить графики функций, находя сначала их области определения и множества значений:

1) $y = x^3$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = x^4$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$;
3) $y = x^2$ и $y = x^{-2}$; 4) $y = x^5$ и $y = x^{-5}$.

126 Найти промежутки, на которых график функции:

1) $y = x^8$; 2) $y = x^{\frac{1}{3}}$ — лежит выше (ниже) графика функции $y = x$.

127 Изобразить схематически график функции и найти её область определения и множество значений; выяснить, является ли функция возрастающей (убывающей), ограниченной сверху (снизу):
1) $y = (x-2)^7$; 2) $y = (x+1)^6$; 3) $y = (x+2)^{-2}$; 4) $y = (x-1)^{-3}$.

128 Пользуясь рисунком 13 (с. 45), найти промежутки, на которых график функции: 1) $y = x^{\frac{1}{5}}$; 2) $y = x^{\frac{5}{3}}$ — лежит выше (ниже) графика функции $y = x$.

129 Построить график функции и указать её область определения, множество значений и промежутки возрастания и убывания; выяснить, является ли функция ограниченной сверху (снизу):

1) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = |x|^5$; 3) $y = |x|^3 + 1$;

4) $y = |x|^{\frac{1}{5}} - 2$; 5) $y = |x+2|^{\frac{1}{3}}$; 6) $y = |2x|^{-3}$.

130 Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = \sqrt[5]{x}$ и $y = x^{\frac{3}{5}}$; 2) $y = \sqrt[7]{x}$ и $y = x^{\frac{5}{7}}$.

136 Найти функцию, обратную к данной:

1) $y=-x^{\frac{1}{2}}$; 2) $y=-x^{\frac{3}{5}}$; 3) $y=x^{\frac{3}{2}}$; 4) $y=-x^{\frac{1}{3}}$.

137 . На одном рисунке построить график данной функции и функции, обратной к данной; найти область определения и множество значений каждой из них:

1) $y=3x-1$; 2) $y=\frac{2x-1}{3}$;

3) $y=x^2-1$ при $x \geqslant 0$;

4) $y=(x-1)^2$ при $x \geqslant 1$;

5) $y=x^3-2$; 6) $y=(x-1)^3$;

7) $y=\sqrt{x-1}$; 8) $y=\sqrt{x}+1$.

Контрольные вопросы:

1. Как найти область определения степенной функции?
2. Как найти область значений степенной функции?
3. Сформулируйте теорему об обратимости функции.
4. Сформулируйте теорему о монотонности обратной функции.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Иррациональные уравнения и неравенства

Цель практического занятия

Получить знания об иррациональных уравнениях и неравенствах.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Определения иррациональных уравнений и неравенств.
2. Основные виды иррациональных уравнений.
3. Основные правила решения иррациональных уравнений и неравенств.

Иррациональное уравнение – это уравнения, в которых неизвестное находится под знаком корня.

Свойство: при возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение – следствие данного.

Рассмотрим **виды иррациональных уравнений**

$\sqrt{f(x)} = a$

В этом случае мы можем воспользоваться определением квадратного корня.

Из него следует, что a≥0, тогда $(\sqrt{a})^2 = a$

Для нашего случая получим

$(\sqrt{f(x)})^2 = a^2$ или $f(x) = a^2$

$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 0$

Мы знаем, что сумма положительных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно нулю.
Т.е. $\{f(x) = 0\ g(x) = 0$

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

По определению квадратного корня $f(x) > 0$. Таким образом, чтобы найти такие значения неизвестной, при которых выполняются следующие условия:

$\{f(x) \geq 0\ g(x) \geq 0\ f(x) = g(x)$

Примеры:

1. $\sqrt{x} = 2$

$x = 2^2$

$x = 4$

Ответ: x=4

1. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-4}=0$

$$\begin{cases} x+2=0 \\ x-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2x \\ x=4 \end{cases}$$

следовательно, решений нет

Ответ: решений нет

Определение. Неравенство, содержащие переменную под знаком корня, называется иррациональным.

Иррациональное неравенство, как правило, сводится к равносильной системе (или совокупности систем) неравенств.

1. $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \{g(x) \ge 0, f(x) > g(x)$
2. $\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \{g(x) \ge 0, f(x) \ge g(x)$
3. $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \{f(x) \ge 0, g(x) > 0, f(x) < g^2(x)$
4. $\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \{f(x) \ge 0, g(x) \ge 0, f(x) \le g^2(x)$
5. $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow [\{g(x) < 0, f(x) \ge 0 \; \{g(x) \ge 0, f(x) > g^2(x)$
6. $\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow [\{g(x) < 0, f(x) \ge 0 \; \{g(x) \ge 0, f(x) \ge g^2(x)$

Пример 1.

Решим уравнение: $\sqrt{x}=x-2$

Возведем в квадрат обе части уравнения, получим:

$x=(x-2)^2$, которое не будет равносильно исходному уравнению, потому что у этого уравнения два корня $x_1=1, x_2=4$, а у первоначального уравнения только один корень x=4.

№1.

Подчеркните корни данного уравнения

$\sqrt[4]{1-x^4}=\sqrt[4]{1-x^2}$

1. 0; 1
2. -1;0;1
3. -1;0

Решим данное уравнение.

$\{1-x^4 \ge 0 \; 1-x^2 \ge 0 \; 1-x^4=1-x^2$

Получаем три корня из последнего уравнения: -1;0;1

Верный ответ: 2

1. 0; 1
2. **-1;0;1**
3. -1;0

Пример 2.

Решите уравнение: $\sqrt{x-5}=\sqrt{2x-3}$

1 способ:

Рассмотрим область определения функций:

$\{x-5\geq 0\ 2x-3\geq 0$

$\{x\geq 5\ x\geq 1{,}5$

x-5=2x-3

x=-2, но -2 не входит в область определения функций, следовательно, решений нет.

Ответ: решений нет.

2 способ:

x-5=2x-3

x=-2

Проверка:

$\sqrt{-2-5}=\sqrt{-7}, -7<0$

$\sqrt{2(-2)-3}=\sqrt{-7}, -7<0$

Значит, x=-2- посторонний корень

Ответ: решений нет

Практическая часть

1. Выучите определения иррациональных уравнений и неравенств.
2. Выучите правила решения иррациональных уравнений
3. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/5569/main/159267/.
4. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/5569/train/159271/.
5. Решите задачи:

138 **Решить уравнение:**

1) $(x+7)\cdot 3=2x+14$; 2) $x^2+\dfrac{1}{x^2-4}=4+\dfrac{1}{x^2-4}$;

3) $\dfrac{x-2}{x^2-1}=\dfrac{1-2x}{x^2-1}$; 4) $\dfrac{5x-15}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{2}{x+2}$.

139 Равносильны ли следующие уравнения:

1) $3x - 7 = 5x + 5$ и $2x + 12 = 0$;

2) $\frac{1}{5}(2x-1) = 1$ и $\frac{3x-1}{8} = 1$;

3) $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x^2 + 3x + 2 = 0$;

4) $(x-5)^2 = 3(x-5)$ и $x - 5 = 3$;

5) $x^2 - 1 = 0$ и $2^{x-1} = 0$;

6) $|x - 2| = -3$ и $3^x = (-1)^3$?

147 Решить уравнение $\frac{1}{3x+1} - \frac{2}{3x-1} - \frac{5x}{9x^2-1} = \frac{3x^2}{1-9x^2}$.

148 Найти корни уравнения:

1) $\frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{x^2+5}{x^2-1} - 5$;

2) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x(x-4)}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+2} - \frac{4(3+x)}{4-x^2}$.

149 Решить неравенство:

1) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 > 2x^3 - x^2 + 4x - 2$;

2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 > -3x^3 + x^2 + 12x - 4$.

150 Доказать, что если каждая из функций $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ определена на множестве X и $\varphi(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, то уравнения

$$f(x) = g(x) \text{ и } f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$$

равносильны.

Решить уравнение (152—161).

152 1) $\sqrt{x+1} = 3$; 2) $\sqrt{x-2} = 5$; 3) $\sqrt{4+x} = \sqrt{2x-1}$.

153 1) $\sqrt[3]{2x+3} = 1$; 2) $\sqrt[3]{1-x} = 2$; 3) $\sqrt[3]{3x^2-3} = \sqrt[3]{8x}$.

154 1) $x+1 = \sqrt{1-x}$; 2) $x = 1 + \sqrt{x+11}$;

3) $\sqrt{x+3} = \sqrt{5-x}$; 4) $\sqrt{x^2-x-3} = 3$.

155 1) $\sqrt{x} - x = -12$; 2) $x + \sqrt{x} = 2(x-1)$;

3) $\sqrt{x-1} = x - 3$; 4) $\sqrt{6+x-x^2} = 1 - x$.

156 1) $\sqrt{2x-34} = 1 + \sqrt{x}$; 2) $\sqrt{5x} + \sqrt{14-x} = 8$;

3) $\sqrt{15+x} + \sqrt{3+x} = 6$; 4) $\sqrt{3-2x} - \sqrt{1-x} = 1$.

157 1) $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^3+x^2} = 0$; 2) $\sqrt[3]{1+x^4} = \sqrt[3]{1+x^2}$.

158 1) $\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x} = 2$; 2) $\sqrt{12+x} - \sqrt{1-x} = 1$;

3) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = 0$; 4) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9$.

159 1) $\sqrt{1-2x} - \sqrt{13+x} = \sqrt{x+4}$;

2) $\sqrt{7x+1} - \sqrt{6-x} = \sqrt{15+2x}$.

160 1) $\sqrt[3]{x-2} = 2$; 2) $\sqrt[3]{2x+7} = \sqrt[3]{3(x-1)}$;

3) $\sqrt[4]{25x^2-144} = x$; 4) $x^2 = \sqrt{19x^2-34}$.

161 1) $\sqrt[3]{x^3-2} = x-2$; 2) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5} = x-2$.

162 Выяснить с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение:

1) $\sqrt{x-6} = -x^2$; 2) $\sqrt[3]{x} = (x-1)^2$;

3) $\sqrt{x+1} = x^2-7$; 4) $x^3-1 = \sqrt{x+1}$.

Решить неравенство (166—171).

166 1) $\sqrt{x} > 2$; 2) $\sqrt{x} < 3$; 3) $\sqrt[3]{x} \geqslant 1$;

4) $\sqrt[3]{2x} < 3$; 5) $\sqrt{3x} > 1$; 6) $\sqrt{2x} \leqslant 2$.

167 1) $\sqrt{x-2} > 3$; 2) $\sqrt{x-2} < 1$;

3) $\sqrt{3-x} < 5$; 4) $\sqrt{4-x} > 3$;

5) $\sqrt{2x-3} > 4$; 6) $\sqrt{x+1} \geqslant \frac{2}{3}$;

7) $\sqrt{3x-5} < 5$; 8) $\sqrt{4x+5} \leqslant \frac{1}{2}$.

168 1) $\sqrt{x^2-1} > 1$; 2) $\sqrt{1-x^2} < 1$;

3) $\sqrt{25-x^2} > 4$; 4) $\sqrt{25-x^2} < 4$.

Решить графически неравенство (172—173).

172 1) $\sqrt{x} \geqslant x$; 2) $\sqrt{x} < x$; 3) $\sqrt{x} > x-2$; 4) $\sqrt{x} \leqslant x-2$.

173 1) $\sqrt{x} \leqslant 2x$; 2) $\sqrt{x} > 0{,}5x$;

3) $\sqrt{x} \geqslant 2x-1$; 4) $\sqrt{x} \geqslant x^2$.

174 Решить неравенство:

1) $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$; 2) $\sqrt{2x^2-7x-4} > -x-\frac{1}{4}$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение иррационального уравнения.
2. Сформулируйте правила решения иррациональных уравнений и неравенств.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Показательная функция

Цель практического занятия
Сформировать систему знаний, связанных с показательной функцией: определение, свойства и график.

Методический материал
Изучаемые вопросы:
1. Понятие показательной функции.
2. Примеры реальных процессов, описываемых показательной функцией.
3. Умение осуществлять самоконтроль.

Функция вида $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ называется **показательной функцией с основанием *a*.**

Такое название она получила потому, что независимая переменная стоит в показателе. Основа
a – заданное число.

Для положительного основания значение степени a^x можно найти для любого значения показателя x – и целого, и рационального, и иррационального, то есть для любого действитель значения.

Сформулируем основные свойства показательной функции.

1. Область определения.

Как мы уже сказали, степень a^x для $a>0$ определена для любого действительного значения переменной x, поэтому область определения показательной функции $D_{(y)}=R$.

2. Множество значений.

Так как основание степени положительно, то очевидно, что функция может принимать только положительные значения.

Множество значений показательной функции $E_{(y)}=R^+$, или $E_{(y)}=(0; +\infty)$.

3. Корни (нули) функции.

Так как основание $a>0$, то ни при каких значениях переменной x функция не обращается в 0 и корней не имеет.

4. Монотонность.

При $a>1$ функция монотонно возрастает.

При $0<a<1$ функция монотонно убывает.

5. При любом значении a значение функции $y(0) = a^0 = 1$.

6. График функции.

При *a>1*

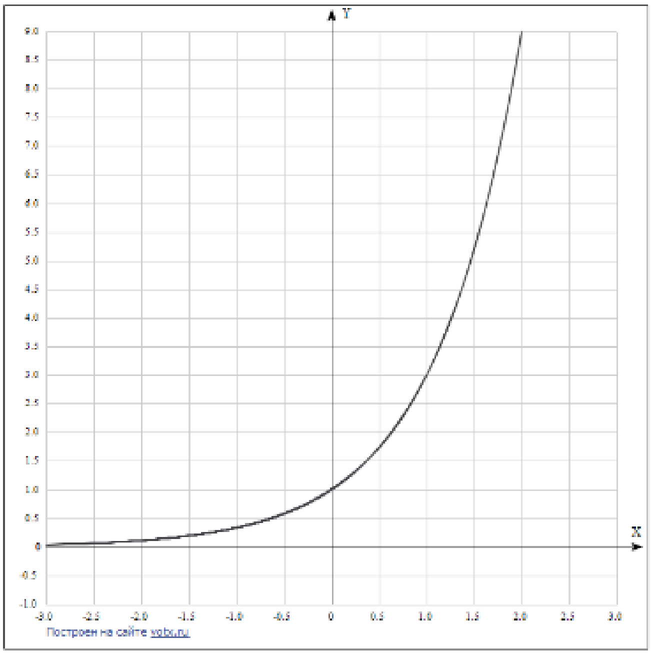


Рисунок 1 – График показательной функции при *a>1*

При 0<*a<1*

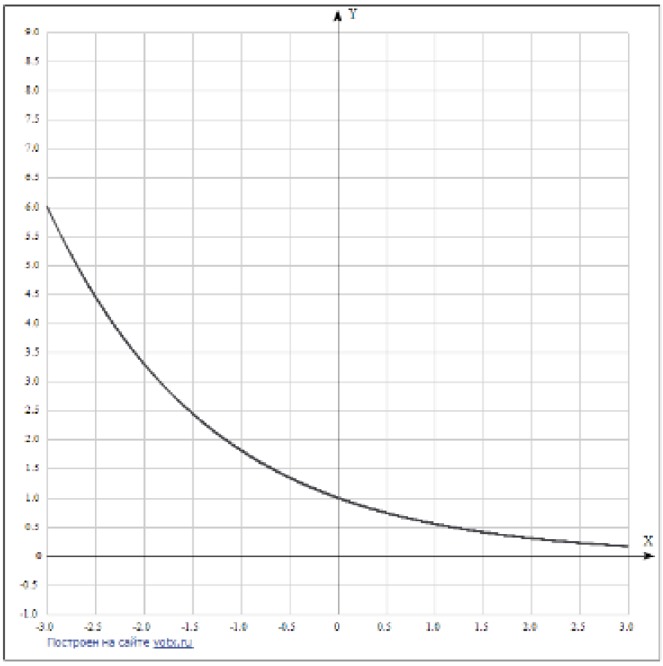


Рисунок 2 – График показательной функции при 0<*a<1*

Независимо от значения основания *a* график функции имеет горизонтальную асимптоту y=0. Для 0<*a<1* при x стремящемся к плюс бесконечности, для *a>1* при x стремящемся к минус бесконечности.

2. Рассмотрим пример исследования функции $y=-3^x+1$.

Решение:

1) Область определения функции – любое действительное число.

2) Найдем множество значений функции.

Так как $3^x>0$, то $-3^x<0$, значит, $-3^x+1<1$, то есть множество значений функции $y=-3^x+1$ представляет собой промежуток $(-\infty; 1)$.

3) Так как функция $y=3^x$ монотонно возрастает, то функция $y=-3^x$ монотонно убывает. Значит, и функция $y=-3^x+1$ также монотонно убывает.

4) Эта функция будет иметь корень: $-3^x+1=0$, $3^x=1$, $x=0$.

5) График функции

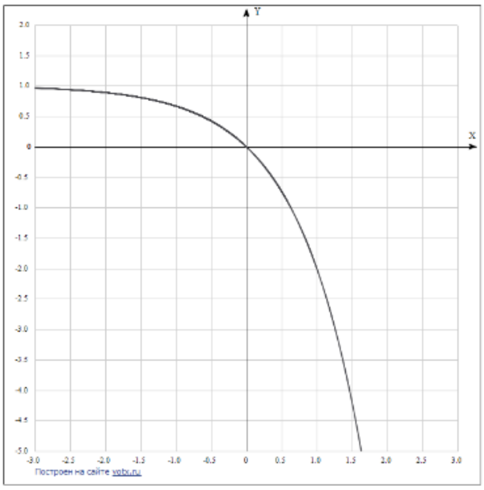


Рисунок 3 – График функции $y=-3^x+1$

6) Для этой функции горизонтальной асимптотой будет прямая $y=1$.

3. Примеры процессов, которые описываются показательной функцией.

1) Рост различных микроорганизмов, бактерий, дрожжей и ферментов описывает формула: $N=N_0 \cdot a^{kt}$, N– число организмов в момент времени t, t – время размножения, a и k – некоторые постоянные, которые зависят от температуры размножения, видов бактерий. Вообще это закон размножения при благоприятных условиях (отсутствие врагов, наличие необходимого количества питательных веществ и т.п.). Очевидно, что в реальности такого не происходит.

2) Давление воздуха изменяется по закону: $P=P_0 \cdot a^{-kh}$, P– давление на высоте h, P_0 – давление на уровне моря, h – высота над уровнем моря, a и k – некоторые постоянные.

3) Закон роста древесины: $D=D_0 \cdot a^{kt}$, D– изменение количества древесины во времени, D_0 – начальное количество древесины, t – время, a и k – некоторые постоянные.

4) Процесс изменения температуры чайника при кипении описывается формулой: $T=T_0+(100-T_0)e^{-kt}$.

5) Закон поглощения света средой: $I=I_0 \cdot e^{-ks}$, s– толщина слоя, k – коэффициент, который характеризует степень замутнения среды.

6) Известно утверждение, что количество информации удваивается каждые 10 лет. Изобразим это наглядно.

Примем количество информации в момент времени t=0 за единицу. Тогда через 10 лет количество информации удвоится и будет равно 2. Еще через 10 лет количество информации удвоится еще раз и станет равно 4 и т.д.

Если предположить, что поток информации изменялся по тому же закону до того года, который принят за начальный, то будем двигаться по оси абсцисс влево от начала координат и над значениями аргумента -10, -20 и т.д. будем наносить на график значения функции уже в порядке убывания — уменьшая каждый раз вдвое.

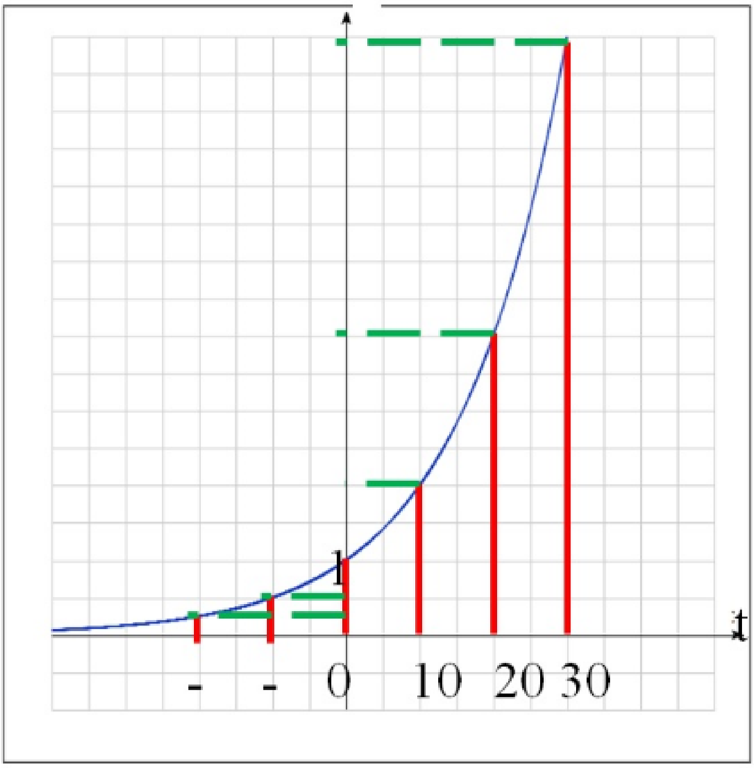


Рисунок 4 – График функции $y=2^x$ – изменение количества информации

Закон изменения количества информации описывается показательной функцией $y=2^x$.

Пример 1.

Выберите показательные функции, которые являются монотонно убывающими.

1. $y=3^{x-1}$
2. $y=(0,4)^{x+1}$
3. $y=(0,7)^{-x}$
4. $y=\left(\frac{3}{7}\right)^{0,5x}$
5. $y=3^{-2x}$
6. $y=10^{2x+1}$

Решение:

Монотонно убывающими являются показательные функции, основание которых положительно и меньше единицы. Такими функциями являются: 2) и 4) (независимо от того, что коэффициент в показателе функции 4) равен 0,5), заметим, что функцию 4) можно переписать в виде: $y=\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)}^{x}$, используя свойство степеней.

Также монотонно убывающей будет функция 5). Воспользуемся свойством степеней и представим ее в виде:

$$y = 3^{-2x} = (3^{-2})^x = \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

Ответ: 2) 4) 5)

Пример 2.

Найдите множество значений функции $y=3^{x+1}-3$.

Решение:

Рассмотрим функцию.

Так как $3^{x+1}>0$, то $3^{x+1}-3>-3$, то есть множество значений:

$(-3; +\infty)$.

Пример 3.

Найдите множество значений функции $y=|2^x-2|$

Рассмотрим функцию.

$2^x-2>-2$, но, так как мы рассматриваем модуль этого выражения, то получаем: $|2^x-2| \geq 0$.

Практическая часть

1. Выучите определение показательной функции.
2. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3841/main/225577/.
3. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3841/train/225583/.
4. Решите задачи:

192 Построить график функции:

1) $y = 3^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

193 С помощью графика функции $y = 3^x$ найти приближённое значение:

1) $\sqrt{3}$; 2) $3^{\frac{2}{3}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3^{-1,5}$.

194 Изобразить схематически график функции:

1) $y = 0{,}4^x$; 2) $y = (\sqrt{2})^x$; 3) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; 4) $y = (\sqrt{3})^x$.

195 (Устно.) Используя свойство возрастания или убывания показательной функции, сравнить числа:

1) $1{,}7^3$ и 1; 2) $0{,}3^2$ и 1; 3) $3{,}2^{1,5}$ и $3{,}2^{1,6}$;

4) $0{,}2^{-3}$ и $0{,}2^{-2}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$; 6) 3^{π} и $3^{3,14}$.

196 Сравнить с единицей число:

1) $(0{,}1)^{\sqrt{2}}$; 2) $(3{,}5)^{0,1}$; 3) $\pi^{-2,7}$; 4) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2}$.

197 Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = 2^x$ и $y = 8$; 2) $y = 3^x$ и $y = \frac{1}{3}$;

3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y = \frac{1}{16}$; 4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 9$.

198 (Устно.) Решить уравнение:

1) $5^x = \frac{1}{5}$; 2) $7^x = 49$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{3}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = \sqrt[3]{7}$.

199 (Устно.) Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = 0{,}3^{-x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x}$; 3) $y = 1{,}3^{-2x}$; 4) $y = 0{,}7^{-3x}$.

200 Решить графически неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$; 3) $5^x > 5$; 4) $5^x < \frac{1}{5}$.

201 Построить график функции:

1) $y = 3^x - 2$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$; 3) $y = 2^{x+1}$; 4) $y = 3^{x-2}$.

202 Доказать, что графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

203 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^x$ на отрезке $[-1; 2]$.

204 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^{|x|}$ на отрезке $[-1; 1]$.

205 Построить график функции:

1) $y = 2^{|x|}$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$; 3) $y = |3^x - 2|$; 4) $y = 2 - 3^x$.

206 При радиоактивном распаде количество некоторого вещества уменьшается вдвое за сутки. Сколько вещества останется от 250 г через 1,5 суток? через 3,5 суток? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

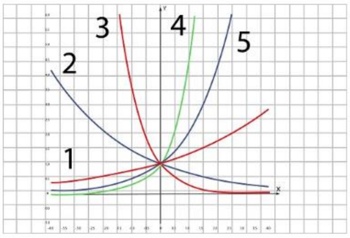
207 На некотором лесном участке можно заготовить $4 \cdot 10^5$ м^3 древесины. Ежегодный прирост деревьев равен 4%. Сколько можно заготовить древесины на этом участке через 5 лет? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

Контрольные вопросы:

5. Выберите показательные функции, которые являются монотонно убывающими.

- [ ] $y = 10^{2x+1}$
- [ ] $y = (0,4)^{x+1}$
- [ ] $y = (0,7)^{-x}$
- [ ] $y = 3^{x-1}$
- [ ] $y = 3^{-2x}$
- [ ] $y = (\frac{3}{7})^{0,5x}$

6. Расположите номера графиков $y = a^x$ в порядке возрастания значения основания степени a без пробелов.

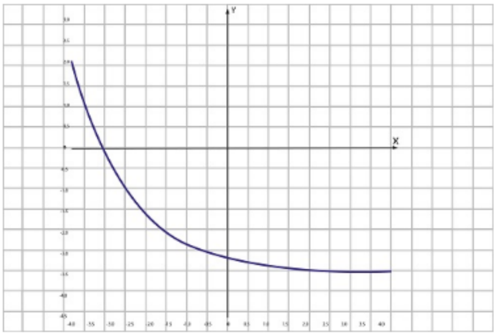


1 3 5 2 4

7. Найдите 6 слов по теме "показательная функция и ее график".

д	ц	й	ш	п	г	й	ш	э	с	к	щ	и	д	ш
к	а	р	г	у	м	е	н	т	о	д	ы	т	в	п
ф	б	с	м	ц	л	э	м	ж	ф	ы	о	к	щ	г
г	с	м	б	щ	б	г	б	щ	п	а	у	л	п	р
б	ц	э	ц	ж	д	ш	ю	ё	д	о	п	ы	о	э
е	и	з	в	щ	в	э	ш	б	ф	с	л	к	к	й
ю	с	м	с	э	щ	д	в	п	ж	н	ч	ы	а	т
у	с	т	е	п	е	н	ь	д	о	о	с	у	з	л
п	а	ю	е	л	я	ы	р	ф	е	в	у	х	а	в
у	о	о	ц	ш	к	б	х	ё	в	а	к	з	т	ш
т	м	ч	б	т	з	т	ц	а	м	н	с	х	е	ж
д	е	д	а	к	щ	х	п	в	ё	и	й	ы	л	р
и	к	о	р	е	н	ь	х	ц	к	е	й	с	ь	л
х	с	ц	ю	т	щ	в	щ	ц	ш	к	ц	т	ф	р
щ	ё	в	б	з	е	й	е	ш	ч	п	ц	э	й	э

8. Выделите уравнение функции, график которой изображен на рисунке.



- $y = 2^{2x} + 4$
- $y = (0,3)^{2x} - 4$
- $y = 4 - 3^{2x}$
- $y = -2^{x} + 4$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Показательные уравнения и неравенства

Цель практического занятия

Сформировать систему знаний и умений, связанных с решением показательных уравнений и их систем.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Определение показательного уравнения.
2. Решение простейших показательных уравнений.
3. Решение показательных уравнений разными способами.

Показательным называется уравнение, в котором переменная входит только в показатели степеней, при заданном основании.

Уравнения вида $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0, a \neq 1)$ называются **простейшими показательными уравнениями**.

В самом простом случае уравнение принимает вид: $a^x = b$.

Так как множество значений показательной функции $f(x) = a^x$ - множество положительных чисел, то при $b \leq 0$ уравнение решений не имеет.

Теперь рассмотрим случай b>0.

Вспомним, что показательная функция при a>1 монотонно возрастает и принимает все положительные значения, каждое ровно один раз. В случае 0

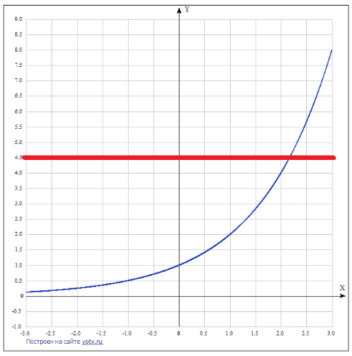


Рисунок 1 – иллюстрация решения простейшего показательного уравнения $a^x = b$, *a>1.*

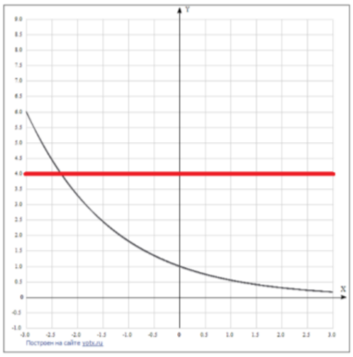


Рисунок 2 – иллюстрация решения простейшего показательного уравнения $a^x = b$, *0.*

Для того чтобы решить простейшее показательное уравнение $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$ *, нужно число b представить в виде степени числа a.*

Рассмотрим пример: $13^x = \sqrt[5]{169}$ *.*

Представим $\sqrt[5]{169}$ *в виде степени числа 13:* $\sqrt[5]{169} = 13^{2/5}$ *.*

Теперь перепишем данное уравнение в виде: $13^x = 13^{2/5}$ *, поэтому x=2/5.*

Ответ: x=2/5.

2. Теперь перейдем к решению более сложных показательных уравнений.

2.1. Рассмотрим уравнение вида:

$$k_1 \cdot a^{f(x)+t_1} + k_2 \cdot a^{f(x)+t_2} + \dots + k_n \cdot a^{f(x)+t_n} = b$$.

То есть мы видим, что левая часть этого уравнения представляет собой сумму, слагаемые которого отличаются коэффициентами (k_i) *и показатели степеней с одинаковыми основаниям отличаются слагаемыми* (t_i) *.*

Для решения таких уравнений левую часть преобразуют следующим образом: выносят за скобку степень $a^{f(x)+t_m}$ *(часто, чтобы избежать дробных коэффициентов, выносят степень с наименьшим показателем):*

$$a^{f(x)+t_m}(k_1 \cdot a^{t_1-t_m} + \dots + k_n \cdot a^{t_n-t_m}) = b$$

Мы видим, что выражение в скобках представляет собой число.

Поэтому выразим $a^{f(x)+t_m} = \frac{b}{k_1 \cdot a^{t_1-t_m} + \dots + k_n \cdot a^{t_n-t_m}}$ *и решим простейшее показательное уравнение.*

Рассмотрим пример:

$$6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$$.

Решение:

Преобразуем левую часть и вынесем за скобку 6^{x-1} *:*

$$6^{x-1}(6^2 + 35) = 71$$

$$6^{x-1} \cdot 71 = 71$$

$$6^{x-1} = 1$$

$$6^{x-1} = 6^0$$

x-1=0

x=1

Ответ: x=1.

2.2. Рассмотрим еще одно уравнение, которое решается с помощью вынесения за скобку общего множителя.

$$4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$$.

Решение:

Преобразуем уравнение: перенесем степени с одинаковыми основаниями в одну часть:

$4^x + 4^{x-0,5} = 3^{x+0,5} + 3^{x-0,5}$,

Теперь преобразуем полученное уравнение к виду: $a^{f(x)} = a^k$ *. Для этого разделим обе части уравнения на* $3^{x-0,5}$ *и на 3:*

$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-0,5} = \frac{4}{3}$.

x-0,5=1

x=1,5.

Ответ: x=1,5.

2.3. Еще один вид показательных уравнений – уравнения, сводящиеся к квадратным:

$k_1 \cdot a^{2f(x)+t_1} + k_2 \cdot a^{f(x)+t_2} + k_3 = 0$.

В этом случае вводят новую переменную: $p = a^{f(x)}$ *. Получим вспомогательное уравнение:*
$b_1 p^2 + b_2 p + k_3 = 0$.

После решения этого уравнения получим простейшие показательные уравнения.

Рассмотрим пример:

$16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$.

Решение:

Введем новую переменную: $t = 4^x$.

Запишем вспомогательное уравнение: $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Рассмотрим пример:

$6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$.

Решение:

Преобразуем левую часть и вынесем за скобку 6^{x-1} *:*

$6^{x-1}(6^2 + 35) = 71$

$6^{x-1} \cdot 71 = 71$

$6^{x-1} = 1$

$6^{x-1} = 6^0$

x-1=0

x=1

Ответ: x=1.

2.2. Рассмотрим еще одно уравнение, которое решается с помощью вынесения за скобку общего множителя.

$4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$.

Решение:

Преобразуем уравнение: перенесем степени с одинаковыми основаниями в одну часть:

$4^x + 4^{x-0,5} = 3^{x+0,5} + 3^{x-0,5}$,

$\begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$ *. Вернемся к переменной x:*

$\begin{cases} 4^x = 1 \\ 4^x = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

2.4. Еще один вид уравнений, который сведется к решению квадратного или уравнения третей степени, это однородное уравнение.

Однородным показательным уравнением *называется уравнение вида:*

$a_1 f^n + a_2 f^{n-1} g + a_3 f^{n-2} g^2 + \dots + a_{n+1} g^n = 0$

Здесь f и g функции вида: $f(x) = b^{t(x)}$, $g(x) = c^{t(x)}$, $a_i -$ *коэффициенты.*

Однородные показательные уравнения решаются делением на g^n *или на* f^n *и последующей заменой:* $t = \frac{f}{g}$.

Рассмотрим пример:

$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

Решение:

Заметим, что $4^x = 2^{2x}$, $9^x = 3^{2x}$, $6^x = 2^x \cdot 3^x$ *. То есть уравнение можно записать в виде:*

$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} = 5 \cdot 2^x \cdot 3^x$.

Разделим уравнение на 3^{2x} *, получим уравнение:* $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$ *. Теперь введем новую переменную:* $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ *и получим вспомогательное уравнение:*

$3t^2 - 5t + 2 = 0$ *, решим его:*

$\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$.

$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ответ: $[x = 0\ x = 1$.

Пример 1.

Решите уравнение: $3^{2x^2}-2\cdot 3^{x^2+x+6}+3^{2x+12}=0$

Решение: Запишем уравнение в виде:

$$\left(3^{x^2}\right)^2-2\cdot 3^{x^2}\cdot 3^{x+6}+(3^{x+6})^2=0$$

Таким образом, уравнение является однородным относительно функций: 3^{x^2} *и* 3^{x+6} .

Разделим уравнение на $(3^{x+6})^2$ *и получим:*

$$\left(3^{x^2-x-6}\right)^2-2\cdot 3^{x^2-x-6}+1=0 \quad .$$

Введем новую переменную: $t=3^{x^2-x-6}$.

Вспомогательное уравнение:

$$t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0$$

$$t=1$$

Вернемся к исходной переменной:

$$3^{x^2-x-6}=1$$

$$x^2-x-6=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \end{array}\right. \quad .$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Пример 2.

Решите систему: $\begin{cases} 64^{2x}+64^{2y}=12 \\ 64^{x+y}=4\sqrt{2} \end{cases}$

Решение: Введем новые переменные: $\begin{cases} a=64^x \\ b=64^y \end{cases}$.

Рассмотрим вспомогательную систему:

$$\begin{cases} a^2+b^2=12 \\ ab=4\sqrt{2} \end{cases} \quad .$$

Возведем второе уравнение в квадрат:

$\begin{cases} a^2+b^2=12 \\ a^2b^2=32 \end{cases}$ *. Решим полученную систему относительно* a^2 *и* b^2 .

$\begin{cases} a^2=4 \\ b^2=8 \end{cases}$ *или* $\begin{cases} a^2=8 \\ b^2=4 \end{cases}$.

Так как $\begin{cases} a=64^x \\ b=64^y \end{cases}$ *, то есть положительные, то*

$\begin{cases} a=2 \\ b=2\sqrt{2} \end{cases}$ *или* $\begin{cases} a=2\sqrt{2} \\ b=2 \end{cases}$.

Вернемся к исходным переменным.

$\begin{cases} 64^x=2 \\ 64^y=2\sqrt{2} \end{cases}$ *или* $\begin{cases} 64^x=2\sqrt{2} \\ 64^y=2 \end{cases}$.

Отсюда:

$\begin{cases} x=1/6 \\ y=1/4 \end{cases}$ *или* $\begin{cases} x=1/4 \\ y=1/6 \end{cases}$.

Ответ: (1/6; 1/4); (1/4; 1/6)

Практическая часть

1. Выучите определения иррациональных уравнений и неравенств.
2. Выучите правила решения иррациональных уравнений
3. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/5627/main/159325/.
4. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/5627/train/159329/.
5. Решите задачи:

Решить уравнение (208—223).

208 1) $4^{x-1}=1$; 2) $0{,}3^{3x-2}=1$; 3) $2^{2x}=2^{4\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

209 1) $27^x=\frac{1}{3}$; 2) $400^x=\frac{1}{20}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$.

210 1) $3\cdot 9^x=81$; 2) $2\cdot 4^x=64$;
3) $3^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^{x-2}=1$; 4) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$;
5) $0{,}6^x\cdot 0{,}6^3=\frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$; 6) $6^{3x}\cdot\frac{1}{6}=6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$.

211 1) $3^{2x-1}+3^{2x}=108$; 2) $2^{3x+2}-2^{3x-2}=30$;
3) $2^{x+1}+2^{x-1}+2^x=28$; 4) $3^{x-1}-3^x+3^{x+1}=63$.

212 1) $5^x=8^x$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $3^x=5^{2x}$; 4) $4^x=3^{\frac{x}{2}}$.

213 1) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$; 2) $16^x-17\cdot 4^x+16=0$;
3) $25^x-6\cdot 5^x+5=0$; 4) $64^x-8^x-56=0$.

214 1) $3^{x^2+x-12}=1$; 2) $2^{x^2-7x+10}=1$;
3) $2^{\frac{x-1}{x-2}}=4$; 4) $0{,}5^{\frac{1}{x}}=4^{\frac{1}{x+1}}$.

215 1) $0{,}3^{x^3-x^2+x-1}=1$; 2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}=1$;
3) $5{,}1^{\frac{1}{2}(x-3)}=5{,}1\sqrt{5{,}1}$; 4) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

216 1) $10^x=\sqrt[3]{100}$; 2) $10^x=\sqrt[5]{10000}$; 3) $225^{2x^2-24}=15$;
4) $10^x=\frac{1}{\sqrt[4]{10000}}$; 5) $(\sqrt{10})^x=10^{x^2-x}$; 6) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

217 1) $2^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}x}=\sqrt[4]{8}$; 2) $5^{0,1x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06}=5^{x^2}$;
3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; 4) $0{,}7^{\sqrt{x+12}}\cdot 0{,}7^{-2}=0{,}7^{\sqrt{x}}$.

218 1) $7^x-7^{x-1}=6$; 2) $3^{2y-1}+3^{2y-2}-3^{2y-4}=315$;
3) $5^{3x}+3\cdot 5^{3x-2}=140$; 4) $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^x+6=0$.

219 1) $7^{x-2}=3^{2-x}$; 2) $2^{x-3}=3^{3-x}$;
3) $3^{\frac{x+2}{4}}=5^{x+2}$; 4) $4^{\frac{x-3}{2}}=3^{2(x-3)}$.

220 1) $(0{,}5)^{x^2-4x+3}=(0{,}5)^{2x^2+x+3}$; 2) $(0{,}1)^{3+2x}=(0{,}1)^{2-x^2}$;
3) $3^{\sqrt{x-6}}=3^x$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2-x}}$.

221 1) $2^{|x-2|}=2^{|x+4|}$; 2) $1{,}5^{|5-x|}=1{,}5^{|x-1|}$;
3) $3^{|x+1|}=3^{2-|x|}$; 4) $3^{|x|}=3^{|2-x|-1}$.

222 1) $3^{x+3}+3^x=7^{x+1}+5\cdot 7^x$;
2) $3^{x+4}+3\cdot 5^{x+3}=5^{x+4}+3^{x+3}$;
3) $2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot 11$;
4) $2^{x+1}+2^{x-1}-3^{x-1}=3^{x-2}-2^{x-3}+2\cdot 3^{x-3}$.

223 1) $8\cdot 4^x-6\cdot 2^x+1=0$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x-6=0$;
3) $13^{2x+1}-13^x-12=0$; 4) $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0$;
5) $2^{3x}+8\cdot 2^x-6\cdot 2^{2x}=0$; 6) $5^{3x+1}+34\cdot 5^{2x}-7\cdot 5^x=0$.

224 При каких значениях x сумма чисел 2^{x-1}, 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии 6,5; 3,25; 1,625; ...?

Решить неравенство (**228—229**).

228 1) $3^x>9$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\frac{1}{4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x<2$;
4) $4^x<\frac{1}{2}$; 5) $2^{3x}\geqslant\frac{1}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}\leqslant\frac{1}{9}$.

229 1) $5^{x-1}\leqslant\sqrt{5}$; 2) $3^{\frac{x}{2}}>9$; 3) $3^{x^2-4}\geqslant 1$; 4) $5^{2x^2-18}<1$.

230 Решить графически уравнение:
1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x-\frac{1}{2}$;
3) $2^x=-x-\frac{7}{4}$; 4) $3^x=11-x$.

Решить неравенство (**231—232**).

231 1) $2^{-x^2+3x}<4$; 2) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x}\geqslant\frac{9}{7}$;
3) $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x}<\frac{121}{169}$; 4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+x}\leqslant 7\frac{1}{9}$.

232 1) $3^{x+2}+3^{x-1}<28$; 2) $2^{x-1}+2^{x+3}>17$;
3) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}\geqslant 448$; 4) $5^{3x+1}-5^{3x-3}\leqslant 624$.

233 Найти целые решения неравенства на отрезке $[-3; 3]$:
1) $9^x-3^x-6>0$; 2) $4^x-2^x<12$;
3) $5^{2x+1}+4\cdot 5^x-1>0$; 4) $3\cdot 9^x+11\cdot 3^x<4$.

234 Найти область определения функции:
1) $y=\sqrt{25^x-5^x}$; 2) $y=\sqrt{4^x-1}$.

235 При каких значениях x значения функции $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ больше значений функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+12$?

236 Решить графически неравенство:
1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\geqslant x+1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x<x-\frac{1}{2}$;
3) $2^x\leqslant 9-\frac{1}{3}x$; 4) $3^x>-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

237 **Решить графически уравнение:**

1) $2^x = 3 - 2x - x^2$; 2) $3^{-x} = \sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{3}{x}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^3 - 1$.

238 **Решить неравенство:**

1) $11^{\sqrt{x+6}} > 11^x$; 2) $0{,}3^{\sqrt{30-x}} > 0{,}3^x$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение показательного уравнения.
2. Сформулируйте правила решения показательных уравнений и неравенств.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Логарифмическая функция

Цель практического занятия

Получить знания о логарифмической функции.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Понятие логарифмической функции.
2. Выяснить, зависят ли свойства логарифмической функции от основания логарифма.
3. Свойства логарифмической функции.
4. График логарифмической функции.
5. Применение свойств функции для сравнения логарифмов и решения уравнений.

Функцию вида $\log_a x$, где a – заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$ называют **логарифмической функцией**.

Свойства логарифмической функции:

1. **Область определения –** множество всех положительных чисел. $(0; +\infty)$. Это следует из определения логарифма (т. к. логарифм существует только положительного числа!)

2. **Множество значений** логарифмической функции – множество всех действительных чисел. R

3. **Неограниченная** функция. (Следует напрямую из 2 свойства.)

4. **Возрастающая**, если $a > 1$, и **убывающая**, если $0 < a < 1$.

Докажем возрастание по определению возрастающей функции, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

Пусть $a > 1, 0 < x_1 < x_2$.

По основному логарифмическому тождеству $x_1 = a^{x_1}, x_2 = a^{x_2}$, следовательно $a^{x_1} < a^{x_2}$. По свойству степеней с одинаковым основанием, большим 1 имеем: $x_1 < x_2$. Т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции, следовательно, функция возрастающая. Аналогично доказывается убывание функции при основании $0 < a < 1$.

Из этого свойства следуют два важных утверждения:

Если $a > 0$ и $x_1 < x_2$, где $x_1 > 0, x_2 > 0$, то $x_1 < x_2$

Если $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$, где $x_1 > 0, x_2 > 0$, то $x_1 > x_2$.

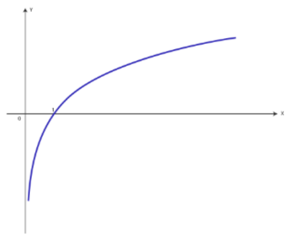
5. **Нули** функции: $x = 1$ (т. к. $1 = 0$)

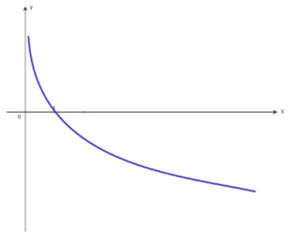
6. **Промежутки знакопостоянства** $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$.

Если $a > 0$, то функция принимает положительные значение при x > 1, отрицательные при 0 < x < 1.

Если $0 < a < 1$, функция принимает положительные значение при 0 < x < 1, отрицательные при x > 1.

Из рассмотренных свойств логарифмической функции следует, что ее график располагается правее оси Оy, обязательно проходит через точку (1; 0) и имеет вид: если основание больше 1 (график №1) и если основание больше нуля, но меньше 1 (график №2).





Отметим, если $x_1 = x_2$, где $a > 0, a \neq 1, x_1 > 0, x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$.

Докажем это утверждение.

Предположим, что $x_1 \neq x_2$, например, $x_1 < x_2$. Тогда если основание $a > 1$, в силу возрастания функции $x_1 < x_2$. Противоречие с условием задачи. Если $0 < a < 1$, тогда функция убывающая и $x_1 > x_2$. Тоже противоречие с условием задачи, что $x_1 = x_2$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Это свойство применяется при решении уравнений.

Задача 1.

Решить уравнение: $(3x - 1) = 4$.

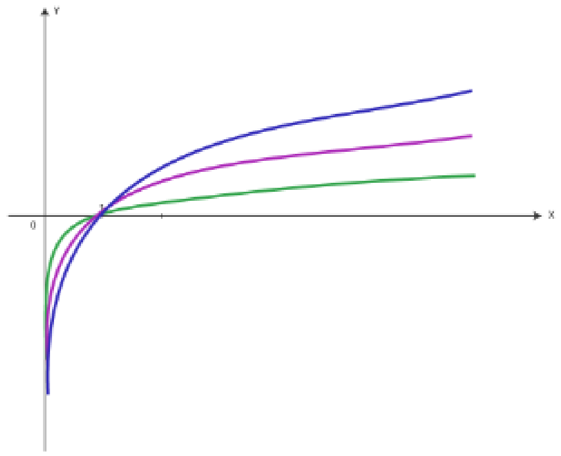
Слева и справа логарифмы по одинаковым основаниям, значит при условии, что $3x - 1 > 0$ и $4 > 0$ (иначе логарифмы не существуют) приравниваем выражения под логарифмами:

$3x - 1 = 4;\ 3x = 5;\ x = \frac{5}{3}$.

Ответ: $\frac{5}{3}$.

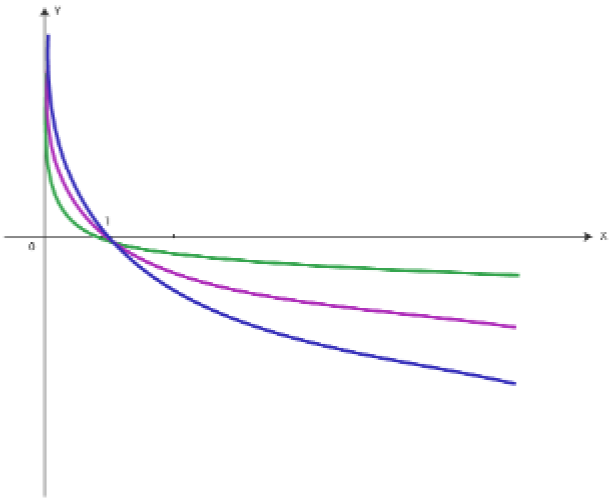
Особенности графиков логарифмической функции с разными основаниями.

Построим в одной системе координат графики функций $y = x$, $y = x$; $y = lg\, lg\, x$.



Видно, что чем больше основание, тем ближе к осям координат расположен график. Обратите внимание: все графики проходят через точку (1; 0).

В другой системе координат построим графики функций с основаниями от 0 до $y = x$, $y = x$, $y = x$



Видно, что в этом случае график приближается к осям координат при уменьшении основания. Но все так же есть общая точка (1; 0).

1. Если функция возрастающая ($a > 1$), при увеличении основания график приближается к осям координат.

2. Если функция убывающая $(0 < a < 1)$, при уменьшении основания график приближается к осям координат.

№1. Найдите область определения функции: $y = (x + 1)$

Решение.

Для функции $y = x$ область определения все положительные числа, т. е. $x > 0$.

В данной функции $y = (x + 1)$ под логарифмом выражение, которое также должно быть больше нуля.

$x + 1 > 0; x > -1$.

Ответ: $(-1;\ +\infty)$

№2 Найдите наибольшее значение функции на данном промежутке

$y = x, \left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$

Решение:

Рассмотрим функцию $y = x$. Это убывающая функция, т.к. основание меньше 1. Если функция убывает, то большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Значит наибольшее значение функции будет при $x = \frac{4}{9}$, а наименьшее – при $x = \frac{81}{16}$.

$y\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9} = 2$.

Ответ: 2.

Практическая часть

1. Выучите определения области определения функции, области значения функции.
2. В каком случае функция возрастает?
3. Выучите способы преобразования графиков функций.
4. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3834/main/198660/.
5. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/3834/train/198664/.
6. Решите задачи:

266 Найти логарифмы чисел по основанию 3:

$3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{243},\ \sqrt[3]{3},\ \frac{1}{3\sqrt{3}},\ 9\sqrt[4]{3}.$

Вычислить (267—276).

267 1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_2 2$; 4) $\log_2 1$.

268 1) $\log_2 \frac{1}{2}$; 2) $\log_2 \frac{1}{8}$; 3) $\log_2 \sqrt{2}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

269 1) $\log_3 27$; 2) $\log_3 81$; 3) $\log_3 3$; 4) $\log_3 1$.

270 1) $\log_3 \frac{1}{9}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3}$; 3) $\log_3 \sqrt[4]{3}$; 4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

271 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 3) $\log_{0,5} 0,125$;

4) $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; 5) $\log_{0,5} 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$.

272 1) $\log_5 625$; 2) $\log_6 216$; 3) $\log_4 \frac{1}{16}$; 4) $\log_5 \frac{1}{125}$.

273 1) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$; 3) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

274 1) $3^{\log_3 18}$; 2) $5^{\log_5 16}$; 3) $10^{\log_{10} 2}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$.

275 1) $3^{5\log_3 2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}$; 3) $0,3^{2\log_{0,3} 6}$; 4) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9}$.

276 1) $8^{\log_2 5}$; 2) $9^{\log_3 12}$; 3) $16^{\log_4 7}$; 4) $0,125^{\log_{0,5} 1}$.

277 Решить уравнение:

1) $\log_6 x = 3$; 2) $\log_5 x = 4$; 3) $\log_2 (5 - x) = 3$;

4) $\log_3 (x + 2) = 3$; 5) $\log_{\frac{1}{6}} (0,5 + x) = -1$.

290 1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$; 2) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125$;
3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; 4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

291 1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; 2) $\log_5 75 - \log_5 3$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$.

292 1) $\log_{13} \sqrt[5]{169}$; 2) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}}$.

293 1) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;
2) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$;
3) $\frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;
4) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

Контрольные вопросы:

1. Может ли значение логарифма какого-либо числа быть: …
   - иррациональным числом
   - равным нулю
   - целым отрицательным числом
   - натуральным числом
   - неправильной дробью
   - правильной дробью
2.

Найти область определения функции:
1) $y = \log_8 (x^2 - 3x - 4)$; 2) $y = \log_{\sqrt{3}} (-x^2 + 5x + 6)$;
3) $y = \log_{0,7} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$; 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x - 4}{x^2 + 4}$;
5) $y = \log_\pi (2^x - 2)$; 6) $y = \log_3 (3^{x-1} - 9)$.

Построить график функции, найти её область определения и множество значений:
1) $y = \log_3 (x - 1)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$; 3) $y = 1 + \log_3 x$;
4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$; 5) $y = 1 + \log_3 (x - 1)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Логарифмические уравнения и неравенства

Цель практического занятия

Познакомиться с основными видами логарифмических уравнений и способами их решения.

Методический материал

Изучаемые вопросы:

1. Понятие простейшего логарифмического уравнения.
2. Способы решения логарифмических уравнений.

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

Напомним, что число x называется *логарифмом* числа bпо основанию a, если $a^x = b$.

Таким образом, по определению $a^{\log_a b} = b$.

Поскольку операция возведения в степень определена только при положительном основании степени,то логарифмы определены только при положительном основании. Кроме того, из того, что любая степень единицы равна единице, следует, что основание логарифма должно быть отличным от единицы. Любая степень положительного числа есть положительное число, поэтому логарифмы определены только для положительных чисел. Следовательно, функция $y = log_a x$определена при $x>0$ *и* $a>0, a\neq 1$. Это обстоятельство необходимо учитывать при решении уравнений, содержащих логарифмы, и начинать с определения области допустимых значений, учитывая, что все выражения, от которых берутся логарифмы, должны быть положительны.

Отметим, что из определения логарифма следует, что$\log_a a = 1$ для любого а, при котором определен логарифм.

Напомним основные свойства логарифмов:

Отметим, что из определения логарифма следует, что$\log_a a = 1$ для любого а, при котором определен логарифм.

Напомним основные свойства логарифмов:

$$\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c a^n = n \cdot \log_c a$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\log_c \frac{1}{a} = -\log_c a$$

Пример 1.1. Решить уравнение.

$$\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4$$

ОДЗ: $\begin{cases}(x^2+x-6)^2>0\\ x+1>0\\ x+1\neq 1\end{cases}$

$$(x+1)^4=(x^2+x-6)^2$$

$$(x^2+2x+1)^2=(x^2+x-6)^2$$

$$\begin{cases}x^2+2x+1=x^2+x-6,\\ x^2+2x+1=-x-x^2+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7\\ x=1\\ x=-2{,}5\end{cases}$$

с учетом ОДЗ, корень уравнения равен 1

Отв:1

Пример 1.2. Решить уравнение.

$$\log_{9x^2}(6+2x-x^2)=\frac{1}{2}$$

ОДЗ: $\begin{cases}6+2x-x^2>0\\ 9x^2\neq 1\\ x=0\end{cases}$

$$\sqrt{9x^2}=6-2x-x^2$$

$$|3x|=6-2x-x^2$$

$$\begin{cases}3x=6+2x-x^2\\ 3x=-6-2x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ x=2\\ x=6\\ x=-1\end{cases}$$

с учетом ОДЗ $x=-1, x=2$

ответ: -1;2

Пример 1.3. Решить уравнение.

$$2\log_{0,2}x=\log_{0,2}(5x^2-x)$$

ОДЗ: $\begin{cases}x>0\\ 5x^2-x>0\end{cases}$

$$\log_{0,2}x^2=\log_{0,2}(5x^2-x),$$

$$x^2=5x^2-x, 4x^2-x=0, x=0, x=\frac{1}{4}$$

$x=0$не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $\frac{1}{4}$

1.2. Метод потенцирования

Потенцирование, то есть переход от уравнения$\log_{f(x)}\varphi(x)=\log_{f(x)}\omega(x)$к уравнению $\varphi(x)=\omega(x)$.

Здесь следует иметь в виду, что эти уравнения, возможно, неравносильны. Второе уравнение может иметь корни, не входящие в ОДЗ первого, для которых $f(x)\leq 0, f(x)=1$ или $\varphi(x)=\omega(x)\leq 0$.

Пример 1.4. Решить уравнение.

lg5+ lg(x+10)=1-lg(2x-1)+lg(21x-20)

Решение:

ОДЗ определено условиями условием: $\begin{cases} x+10>0 \\ 2x-1>0 \\ 21x-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-10 \\ x>\frac{1}{2} \\ x>\frac{20}{21} \end{cases}$

Заменим единицу на lg10 и используем формулы суммы и разности логарифмов. Получим уравнение

$$\lg\big(5(x+10)\big) = \lg\frac{10(21x-20)}{(2x-1)}$$

Потенцирование и сокращение на 5 приводит к уравнению

$$x+10 = \frac{2(21x-20)}{2x-1}$$

После приведения к общему знаменателю и приведения подобных членов получаем уравнение

$$2x^2 - 23x + 30 = 0$$

Корнями, которого являются числа $x_1 = 10, x_2 = \frac{3}{2}$, оба входящие в ОДЗ

Ответ: $x_1 = 10, x_2 = \frac{3}{2}$

1.3. Применение основного логарифмического тождества

При применении основного логарифмического тождествапроисходит переход от уравнения $f(x)^{\log_{f(x)}\varphi(x)} = \omega(x)$ к уравнению $\varphi(x) = \omega(x)$. Здесь также могут появиться посторонние корни.

Пример 1.5. Решить уравнение.

$$5^{log_5 x} \cdot \lg 4 = \lg(2 \cdot 9^x - 6^x)$$

Решение: применив основное логарифмическое тождество $a^{log_a b} = b$, и формулу $nlog_c a = log_c a^n$, получим

$$\lg 4^x = \lg(2 \cdot 9^x - 6^x)$$

Потенцирование этого уравнения приводит к однородному показательному уравнению

$$4^x = 2 \cdot 9^x - 6^x$$

Разделим обе части уравнения на 9^x и обозначим $\frac{2}{3}^x = y > 0$. Полученное при этом квадратное уравнение $y^2 + y - 2 = 0$ имеет корни $y_1 = 1, y_2 = -2$. Второй корень посторонний , поэтому $\frac{2}{3}^x = 1, x = 0$ – решение однородного показательного уравнения. Так как $x = 0$ не входит в ОДЗ данного уравнения, то задача не имеет решений.

1.4. Метод введения новой переменной

Распространенным методом решения уравнений и неравенств вообще, и логарифмических в частности, служит замена переменных (метод подстановки). Чаще всего этот метод используется, когда уравнение или неравенство является квадратным относительно функции, содержащей искомую переменную. Ниже рассмотрим некоторые виды замены переменной, позволяющие значительно упростить или ускорить получение решения уравнений содержащих кроме логарифмической другие комбинации функций.

Пример 1.6. Найти произведение корней уравнения.

$$\lg(-x) = \frac{3}{\lg x^2}$$

ОДЗ: $x < 0, x \neq 1$

$\lg x^2 = 2\lg|x| = 2\lg(-x)$, так как $x<0$

$$\frac{\lg(-x)}{6} = \frac{3}{2\lg(-x)}, lg\ ^2(-x) = 9$$

$\log(-x) = 3$ или $\log(-x) = -3, x = -1000, x = -0{,}001$

Произведение корней равно 1

Ответ: 1

Пример 1.7. Решить уравнение.

$$7^{\log_7 x^{2\log_7 x}} = 8x^{\log_7 x} - 7$$

$$x^{\,2\log_7 x} - 8x^{\log_7 x} + 7 = 0$$

$$t = x^{\log_7 x}$$

ОДЗ: $x = 0, t > 0$

$$t^2 - 8t + 7 = 0$$

$$t_1 = 1; t_2 = 7$$

$x^{\log_7 x} = 1; x^{\log_7 x} =$

ологарифмируем оба уравнеия по основанию 7: $\log_7 x^{\log_7 x} =$

$1\,;\ \log_7 x^{\log_7 x} = \log_7 7$

7 Прологарифмируем оба уравнеия по основанию 7: $\log_7 x^{\log_7 x} =$

$\log_7 1\,;\ \log_7 x^{\log_7 x} = \log_7 7$

$$\log_7 x \log_7 x = 0;\ \log_7 x \log_7 x = 1$$

$$\log_7 x = 0;\quad \begin{cases} \log_7 x = 1 \\ \log_7 x = -1 \end{cases}$$

$$x = 1;\quad \begin{cases} x = 7 \\ x = \dfrac{1}{7} \end{cases}$$

Ответ: $x = 1, x = 7, x = \frac{1}{7}$

Рассмотренные примеры показывают, что замена переменной эффективный прием решения логарифмических уравнений и неравенств.

Преимущество такого приема наиболее ярко проявляется при решении уравнений и неравенств, представляющих комбинацию логарифмических и показательных функций.

1.5. Метод логарифмирования

Метод логарифмирования заключается в том, что обе части равенства или неравенства, если они положительные, можно прологарифмировать по одному основанию (в неравенствах, учитывать при этом монотонность функции).

Пример 1.10. Решить уравнение.

$$x^{lg^2x-5\cdot lgx}=0{,}0001$$

Решение.

ОДЗ определено условием $x>0$. Учитывая, что lg 0,0001=$\lg 10^{-4}=-4\lg 10=-4$, получаем

$$x^{\lg^2 x-5\lg x}=-4$$

Обозначим $y=\lg^2 x$. Получаем уравнение $y^2-5y+4=0$. Корни этого уравнения $y_1=4$; $y_2=1$. Это дает два уравнения для x

$$\lg^2 x=4 \text{ и } \lg^2 x=1$$

Следовательно,

$$\lg x=\pm 2 \text{ или } \lg x=\pm 1$$

Потенцируя, получаем четыре уравнения: $x_1=10^2, x_2=10^{-2}, x_3=10, x_4=10^{-1}$. Все корни входят в ОДЗ.

Ответ: $x_1=10^2, x_2=10^{-2}, x_3=10, x_4=10^{-1}$

Практическая часть

6. Выучите определения логарифмических уравнений и неравенств.
7. Выучите правила решения логарифмических уравнений
8. Просмотрите видео материала по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4732/main/198846/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/3852/main/199123/.
9. Выполните тренировочные задания в виде теста по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4732/train/198850/, https://resh.edu.ru/subject/lesson/3852/train/199127/.
10. Решите задачи:

336 Установить, какое из данных двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $x-3=0$ и $x^2-5x+6=0$; 2) $|x|=5$ и $\sqrt{x^2}=5$;

3) $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0$ и $x^2-3x+2=0$;

4) $\log_8 x+\log_8(x-2)=1$ и $\log_8(x(x-2))=1$.

Решить уравнение (337—341).

337 1) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$;

2) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$;

3) $\lg(x+\sqrt{3})+\lg(x-\sqrt{3})=0$;

4) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=0$.

338 1) $\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2$;

2) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$;

3) $\log_3(x^3-x)-\log_3 x=\log_3 3$.

339 1) $\frac{1}{2}\lg(x^2+x-5)=\lg(5x)+\lg\frac{1}{5x}$;

2) $\frac{1}{2}\lg(x^2-4x-1)=\lg(8x)-\lg(4x)$.

340 1) $\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(6x+8)$.

342 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 2, \\ x - 10y = 900; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2, \\ x^2 y - 2y + 9 = 0. \end{cases}$

Решить уравнение (343—345).

343 1) $\log_5 x^2 = 0$; 2) $\log_4 x^2 = 3$; 3) $\log_3 x^3 = 0$; 4) $\log_4 x^3 = 6$;
5) $\lg x^4 + \lg (4x) = 2 + \lg x^3$; 6) $\lg x + \lg x^2 = \lg (9x)$.

344 1) $\log_4 ((x+2)(x+3)) + \log_4 \frac{x-2}{x+3} = 2$;

2) $\log_2 \frac{x-1}{x+4} + \log_2 ((x-1)(x+4)) = 2$;

3) $\log_3 x^2 - \log_3 \frac{x}{x+6} = 3$; 4) $\log_2 \frac{x+4}{x} + \log_2 x^2 = 5$.

347 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{y} = 4, \\ xy = 2. \end{cases}$

Решить уравнение (348—352).

348 1) $\log_2 x - 2 \log_x 2 = -1$; 2) $\log_2 x + \log_x 2 = 2{,}5$;
3) $\log_3 x + 2 \log_x 3 = 3$; 4) $\log_3 x - 6 \log_x 3 = 1$.

349 1) $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$; 2) $\log_{x^2} 16 - \log_{\sqrt{x}} 7 = 2$.

350 1) $\lg (6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x) - \lg 25 = x$;
2) $\lg (2^x + x + 4) = x - x \lg 5$.

351 1) $\lg^2 (x+1) = \lg (x+1) \cdot \lg (x-1) + 2 \lg^2 (x-1)$;
2) $2 \log_5 (4-x) \cdot \log_{2x} (4-x) = 3 \log_5 (4-x) - \log_5 (2x)$.

352 1) $\sqrt{\log_x 25 + 3} = \frac{1}{\log_5 x}$;

2) $\sqrt{2 \log_2^2 x + 3 \log_2 x - 5} = \log_2 (2x)$.

353 Найти все значения параметра a, при которых уравнение $5 \log_5 x + \log_a x - 4 \log_{25} x = a$ имеет корни.

358 Найти область определения функции:

1) $y = \log_5 (x^2 - 4x + 3)$; 2) $y = \log_6 \frac{3x+2}{1-x}$;

3) $y = \sqrt{\lg x + \lg (x+2)}$; 4) $y = \sqrt{\lg (x-1) + \lg (x+1)}$.

Решить неравенство (359—367).

359 1) $\log_5 \frac{3x-2}{x^2+1} > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2+3}{x-7} < 0$;

3) $\lg (3x-4) < \lg (2x+1)$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} (2x+3) > \log_{\frac{1}{2}} (x+1)$.

360 1) $\log_8 (x^2 - 4x + 3) < 1$; 2) $\log_6 (x^2 - 3x + 2) \geqslant 1$;
3) $\log_3 (x^2 + 2x) > 1$; 4) $\log_{\frac{2}{3}} (x^2 - 2{,}5x) < -1$.

361 1) $\lg (x^2 - 8x + 13) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 5x + 7) < 0$;

3) $\log_2 (x^2 + 2x) < 3$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x - 6) \geqslant -3$.

362 1) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 x^2 > 0$; 2) $\log_3 \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) < 1$.

363 1) $\log_{0,2} x - \log_5 (x-2) < \log_{0,2} 3$;
2) $\lg x - \log_{0,1} (x-1) > \log_{0,1} 0,5$.

364 1) $\log^2_{0,2} x - 5\log_{0,2} x < -6$; 2) $\log^2_{0,1} x + 3\log_{0,1} x > 4$.

365 1) $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} < 1$; 2) $\log_3 (2-3^{-x}) < x + 1 - \log_3 4$;
3) $\log_{x^2-3} (4x+7) > 0$; 4) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}} (\sqrt{6} - 2x) < 0$.

366 $\frac{2}{3^x-1} \leqslant \frac{7}{9^x-2}$.

367 $4^x\left(\sqrt{16^{1-x}-1}+2\right) < 4\left|4^x-1\right|$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение логарифмического уравнения.
2. Сформулируйте правила решения логарифмических уравнений и неравенств.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Стереометрия. Параллельность прямых и плоскостей.

Цель практического занятия

Познакомить студентов с содержанием курса стереометрии, с основными понятиями и аксиомами, принятыми в данном курсе, вывести первые следствия из аксиом, дать представление о геометрических телах и их поверхностях, об изображении пространственных фигур на чертеже, о прикладном значении геометрии.

Ввести понятие параллельных прямых в пространстве.

Рассмотреть свойства параллельных прямых:

- ✓ Теорема о параллельных прямых;
- ✓ Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми;
- ✓ Признак параллельности трех прямых.

Развить логическое мышление, умение четко выполнять чертежи.

Методический материал

1. Аксиомы стереометрии.
2. Определение параллельных прямых.
3. Теорема о единственности прямой, параллельной данной, проходящей через данную точку.
4. Лемма о двух параллельных прямых.
5. Теорема о параллельности трех прямых.
6. Определение параллельных прямой и плоскости.
7. Признак параллельности прямой и плоскости.

Стереометрия- раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве.

Аксиомы- утверждения, содержащиеся в формулировках основных свойств простейших фигур, которые не требуют доказательства.

В стереометрии появляется новая фигура – плоскость.

Плоскость - ровная поверхность (поверхность стола, доски), изображаемая в виде параллелограмма, обозначается греческими буквами α, β, γ.

Аксиомы стереометрии.

Аксиома 1: Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Аксиома 2: Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

Аксиома 3: Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

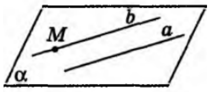
Следствия из аксиом:

Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

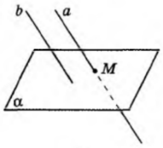
Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Определение. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

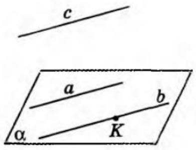
Теорема. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.



Лемма. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

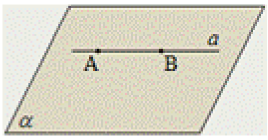


Теорема . Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

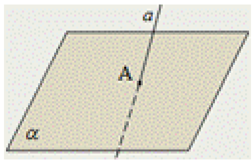


Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

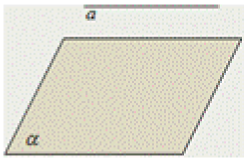
1. Прямая лежит в плоскости



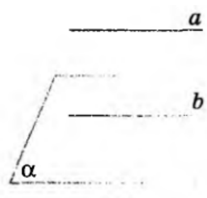
2. Прямая и плоскость имеют только одну общую точку, т.е. пересекаются



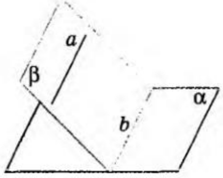
3. Прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки, т.е. параллельны



Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек. Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: $a||\alpha$.
Теорема. (признак параллельности прямой и плоскости).
Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой,лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.



1^0. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.



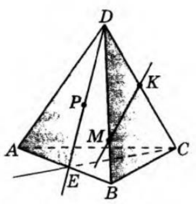
2^0. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.
2. Просмотрите материал по ссылке:
/https://resh.edu.ru/subject/lesson/4756/main/203546/
https://resh.edu.ru/subject/lesson/6065/main/125655/
3. Выполните тренировочные задания по ссылке:
https://resh.edu.ru/subject/lesson/4756/train/203558/
https://resh.edu.ru/subject/lesson/6065/train/

Задачи.

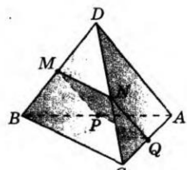
1. По рисунку назовите:
1) плоскости, в которых лежат прямые PE, MK, DB, AB, EC;
2) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC, прямой CE с плоскостью ADB;
3) точки, лежащие в плоскостях ADB и DBC;
4) прямые, по которым пересекаются плоскости ABC и DCB, ABD и CDA, PDC и ABC.



2. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-то три из них лежать на одной прямой? Могут ли прямые AB и CD пересекаться?

3.

На рисунке 17 точки M, N, Q и P — середины отрезков DB, DC, AC и AB. Найдите периметр четырехугольника $MNQP$, если $AD = 12$ см, $BC = 14$ см.



4.

Точка C лежит на отрезке AB. Через точку A проведена плоскость, а через точки B и C — параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если: а) точка C — середина отрезка AB и $BB_1 = 7$ см; б) $AC : CB = 3 : 2$ и $BB_1 = 20$ см.

5.

Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость α. Докажите, что прямые AD и DC также пересекают плоскость α.

6.

Средняя линия трапеции лежит в плоскости α. Пересекают ли прямые, содержащие ее основания, плоскость α? Ответ обоснуйте.

7.

Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Докажите, что любая прямая, параллельная отрезку CD, пересекает плоскости данных треугольников.

8.

Точки A и B лежат в плоскости α, а точка C не лежит в этой плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC, параллельна плоскости α.

9.

На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что длина отрезка DE равна 5 см и $\frac{BD}{DA} \quad \frac{2}{3}$.

Плоскость α проходит через точки B и C и параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

10.

Основание AB трапеции $ABCD$ параллельно плоскости α, а вершина C лежит в этой плоскости. Докажите, что: а) основание CD трапеции лежит в плоскости α; б) средняя линия трапеции параллельна плоскости α.

Контрольные вопросы:

1. Верно ли, что:

а) любые три точки лежат в одной плоскости;

б) любые четыре точки лежат в одной плоскости;

в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости;

г) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна?

2. Сформулируйте три основные аксиомы стереометрии.

3. Сформулируйте определение параллельных прямых.

4. Сформулируйте определение параллельной прямой и плоскости.

5. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между прямыми.

Цель практического занятия

1. Формирование представления о взаимном расположении прямых в пространстве.
2. Формирование навыков чтения и построения чертежей.
3. Развитие пространственных представлений обучающихся.
4. Развитие представлений об общности законов математики, техники и природы.
5. Воспитание аккуратности в построении чертежа.
6. Воспитание культуры математической речи.

Методический материал

1. Признаки скрещивающихся прямых.
2. Определение углов с сонаправленными сторонами.
3. Теорема о плоскости, проходящей через одну из скрещивающихся прямых.
4. Теорема о равенстве углов с сонаправленными сторонами.

Определение. Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.
Теорема: Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Доказательство

Рассмотрим прямую AB, лежащую в плоскости α, и прямую CD, пересекающую эту плоскость в точке C, не лежащей на прямой AB (рис. 20). Докажем, что AB и CD — скрещивающиеся прямые, т. е. они не лежат в одной плоскости. Действительно, если допустить, что прямые AB и CD лежат в некоторой плоскости β, то плоскость β будет проходить через прямую AB и точку C и поэтому совпадет с плоскостью α. Но это невозможно, так как прямая CD не лежит в плоскости α. Теорема доказана.

Итак, **возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве:**

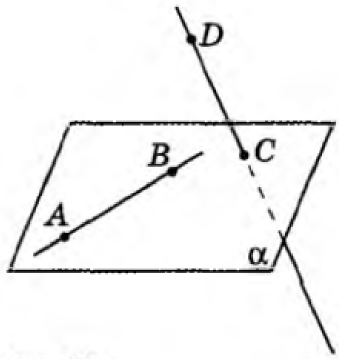
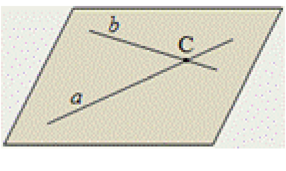


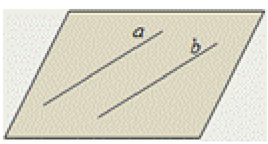
Рис. 20

1.Две прямые лежат в одной плоскости

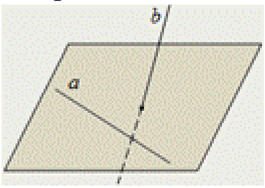
А) пересекаются



Б) параллельны



2. Две прямые не лежат в одной плоскости, т.е. скрещиваются



Теорема. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим скрещивающиеся прямые AB и CD (рис. 22). Докажем, что через прямую AB проходит плоскость, параллельная прямой CD, и такая плоскость только одна.

Проведем через точку A прямую AE, параллельную прямой CD, и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямые AB и AE. Так как прямая CD не лежит в плоскости α и параллельна прямой AE, лежащей в этой плоскости, то прямая CD параллельна плоскости α.

Ясно, что плоскость α — единственная плоскость, проходящая через прямую AB и параллельная прямой CD. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через прямую AB, пересекается с прямой AE, а значит, пересекается и с параллельной ей прямой CD. Теорема доказана.

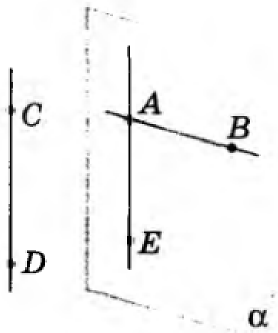


Рис. 22

Углы с сонаправленными сторонами

Согласно одной из аксиом (см. приложение 2) любая прямая a, лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части, называемые **полуплоскостями** (рис. 23). Прямая a называется **границей** каждой из этих полуплоскостей. Любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей — по разные стороны от этой прямой (см. рис. 23).

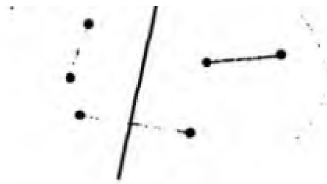
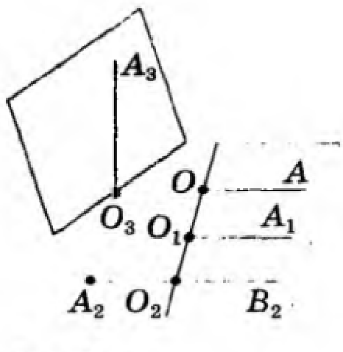


Рис. 23

Два луча OA и O_1A_1, не лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей OO_1. Лучи OA и O_1A_1, лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если они совпадают или один из них содержит другой. На рисунке 24 лучи OA и O_1A_1, а также лучи A_2B_2 и O_2B_2 сонаправлены, а лучи OA и O_2A_2, OA и O_3A_3, O_2A_2 и O_2B_2 не являются сонаправленными (объясните почему). Докажем теорему об углах с сонаправленными сторонами.



Теорема. Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

Доказательство

Ограничимся рассмотрением случая, когда углы O и O_1 с соответственно сонаправленными сторонами лежат в разных плоскостях, и докажем, что $\angle O = \angle O_1$.

Отметим на сторонах угла O какие-нибудь точки A и B и отложим на соответственных сторонах угла O_1 отрезки $O_1A_1 = OA$ и $O_1B_1 = OB$ (рис. 25). Так как лучи OA и O_1A_1 сонаправлены и $OA = O_1A_1$, то получится параллелограмм OAA_1O_1 и, следовательно, $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$. Аналогично получаем: $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$. Отсюда следует, что $AA_1 \parallel BB_1$ и $AA_1 = BB_1$, а, значит, ABB_1A_1 — параллелограмм и $AB = A_1B_1$.

Сравним теперь треугольники AOB и $A_1O_1B_1$. Они равны по трем сторонам, и поэтому $\angle O = \angle O_1$. Теорема доказана.

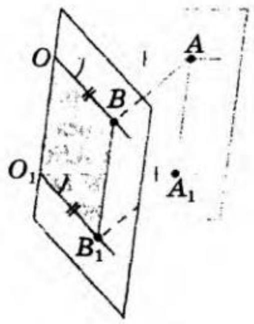


Рис. 25

Угол между прямыми

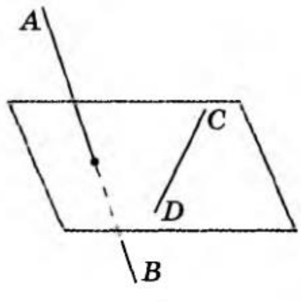
Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Если известен один из этих углов, то можно найти и другие три угла (рис. 26). Пусть α — тот из углов, который не превосходит любого из трех остальных углов. Тогда говорят, что **угол между пересекающимися прямыми равен α.** Очевидно, $0° < \alpha \leqslant 90°$.

Введем теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми. Пусть AB и CD — две скрещивающиеся прямые (рис. 27, *а*). Через произвольную точку M_1 проведем прямые A_1B_1 и C_1D_1, соответственно параллельные прямым AB и CD (рис. 27, *б*).

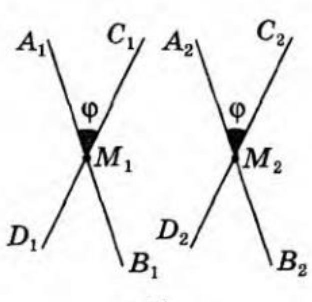
Если угол между прямыми A_1B_1 и C_1D_1 равен φ, то будем говорить, что **угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен φ.**

Докажем, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M_1. Действительно, возьмем любую другую точку M_2 и проведем через нее прямые A_2B_2 и C_2D_2, соответственно параллельные прямым AB и CD (см. рис. 27, *б*). Так как $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $C_1D_1 \parallel C_2D_2$ (объясните почему), то стороны углов с вершинами M_1 и M_2 попарно сонаправлены (на рис. 27, *б* такими углами являются $\angle A_1M_1C_1$ и $\angle A_2M_2C_2$, $\angle A_1M_1D_1$ и $\angle A_2M_2D_2$ и т. д.). Поэтому эти углы соответственно равны. Отсюда следует, что угол между прямыми A_2B_2 и C_2D_2 также равен φ.

В качестве точки M_1 можно взять любую точку на одной из скрещивающихся прямых. На рисунке 27, *в* на прямой CD отмечена точка M и через нее проведена прямая $A'B'$, параллельная AB. Угол между прямыми $A'B'$ и CD также равен φ.



а)



б)

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.

2. Просмотрите материал по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6133/main/272669/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6133/train/272677/

Задачи.

1.

Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M, N и P — середины отрезков DA, DB и DC соответственно, точка K лежит на отрезке BN. Выясните взаимное расположение прямых: а) ND и AB; б) PK и BC; в) MN и AB; г) MP и AC; д) KN и AC; е) MD и BC.

2.

Прямая c пересекает прямую a и не пересекает прямую b, параллельную прямой a. Докажите, что b и c — скрещивающиеся прямые.

3.

Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая a, параллельная диагонали BD, а через вершину C — прямая b, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что: а) прямые a и CD пересекаются; б) a и b — скрещивающиеся прямые.

4.

Докажите, что если AB и CD скрещивающиеся прямые, то AD и BC также скрещивающиеся прямые.

5.

Даны параллелограмм $ABCD$ и трапеция $ABEK$ с основанием EK, не лежащие в одной плоскости. а) Выясните взаимное расположение прямых CD и EK. б) Найдите периметр трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность и $AB = 22{,}5$ см, $EK = 27{,}5$ см.

6.

Прямые OB и CD параллельные, а OA и CD — скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми OA и CD, если: а) $\angle AOB = 40°$; б) $\angle AOB = 135°$; в) $\angle AOB = 90°$.

7.

Прямая a параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в плоскости параллелограмма. Докажите, что a и CD — скрещивающиеся прямые, и найдите угол между ними, если один из углов параллелограмма равен: а) $50°$; б) $121°$.

8.

Прямая m параллельна диагонали BD ромба $ABCD$ и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что: а) m и AC — скрещивающиеся прямые — и найдите угол между ними; б) m и AD — скрещивающиеся прямые — и найдите угол между ними, если угол ABC равен $128°$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение скрещивающихся прямых.
2. Какие возможны варианты взаимного расположения прямых в пространстве?
3. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.
4. Сформулируйте определение углов с сонаправленными сторонами
5. Сформулируйте теорему о плоскости, проходящей через одну из скрещивающихся прямых
6. Сформулируйте теорему о равенстве углов с сонаправленными сторонами
7. Может ли каждая из двух скрещивающихся прямых быть параллельна третьей прямой?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Параллельность плоскостей.

Цель практического занятия

1. Рассмотреть возможные случаи взаимного расположения плоскостей в пространстве.
2. Ввести понятие параллельности плоскостей.
3. Изучить признак параллельности плоскостей.
4. Отработать навыки решения задач.

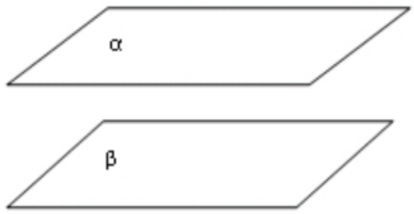
Методический материал

1. Определение параллельных плоскостей.
2. Свойства параллельных плоскостей.
3. Признак параллельности плоскостей.

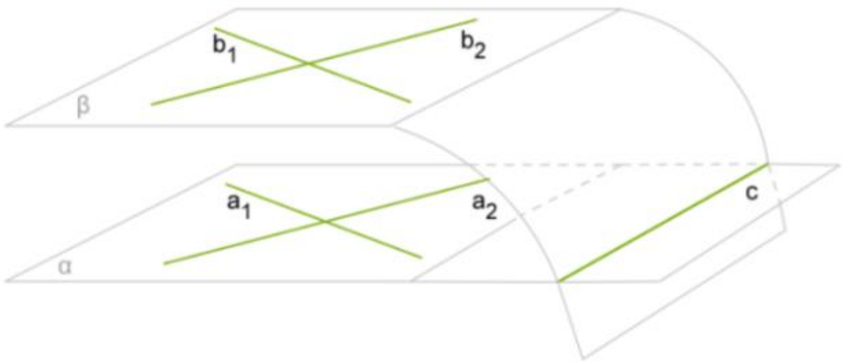
Как известно из аксиом стереометрии, если плоскости имеют одну общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Значит две плоскости или пересекаются, или не пересекаются.

Определение. Плоскости, которые не пересекаются, называются параллельными. Параллельные плоскости α и β обозначаются α‖β.

Изображение:



Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Доказательство.

Пусть α и β - данные плоскости, a1 и a2 – пересекающиеся прямые в плоскости α, а b1 и b2 соответственно параллельные им прямые в плоскости β.

Допустим, что плоскости α и β не параллельны, то есть они пересекаются по некоторой прямой с.

Прямая а1 параллельна прямой b1, значит она параллельна и самой плоскости β.

Прямая а2 параллельна прямой b2, значит она параллельна и самой плоскости β (признак параллельности прямой и плоскости).

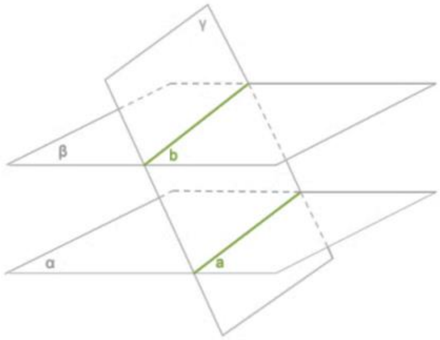
Прямая с принадлежит плоскости α, значит хотя бы одна из прямых а1 или а2 пересекает прямую с, то есть имеет с ней общую точку. Но прямая с также принадлежит и плоскости β, значит, пересекая прямую с, прямая а1 или а2 пересекает плоскость β, чего **быть не может**, так как прямые а1 и а2 параллельны плоскости β.

Из этого следует, что плоскости α и β не пересекаются, то есть они **параллельны**.

Теорема доказана.

Свойства параллельных плоскостей.

Теорема 1. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то линии их пересечения



параллельны.

Доказательство.

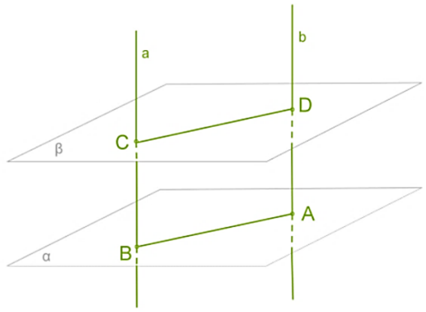
Пусть α и β - параллельные плоскости, а γ- плоскость, пересекающая их.

Плоскость α пересекается с плоскостью γ по прямой а.

Плоскость β пересекается с плоскостью γ по прямой b.

Линии пересечения a и b лежат в одной плоскости γ и потому могут быть либо пересекающимися, либо параллельными прямыми. Но, принадлежа двум параллельным плоскостям, они не могут иметь общих точек. Следовательно, они **параллельны**.

Теорема 2. Отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны.



Доказательство.

Пусть α и β - параллельные плоскости, а a и b – параллельные прямые, пересекающие их.
Через прямые a и b можно провести плоскость - эти прямые параллельны, значит определяют плоскость, причём только одну.
Проведённая плоскость пересекается с плоскостью α по прямой AB, а с плоскостью β по прямой CD.
По предыдущей теореме прямые AB и CD параллельны. Четырехугольник ABCD есть параллелограмм (у него противоположные стороны параллельны). А раз это параллелограмм, то противоположные стороны у него **равны**, то есть BC=AD.

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.
2. Просмотрите материал по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6129/main/131676/.

3. Выполните тренировочные задания по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6129/train/131688/.

Задачи

1.

Три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны.

2.

Точка B не лежит в плоскости треугольника ADC, точки M, N и P — середины отрезков BA, BC и BD соответственно.
а) Докажите, что плоскости MNP и ADC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ADC равна 48 см^2.

3.

Параллельные плоскости α и β пересекают сторону AB угла BAC соответственно в точках A_1 и A_2, а сторону AC этого угла — соответственно в точках B_1 и B_2. Найдите: а) AA_2 и AB_2, если $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см; б) A_2B_2 и AA_2, если $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 \quad \frac{3}{2} A_1A_2$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение параллельных плоскостей.
2. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей.
3. Сформулируйте свойства параллельных плоскостей.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Тетраэдр и параллелепипед

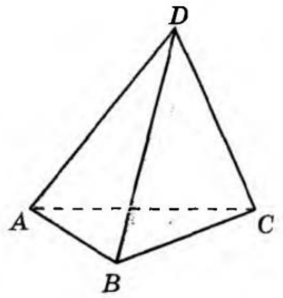
Цели практического занятия

1. Познакомить учеников с понятием тетраэдра, параллелепипеда и их элементами.
2. Рассмотреть свойства рёбер, граней, диагоналей параллелепипеда.
3. Формировать навыки изображения рассматриваемых объектов на плоскости и «чтение» предлагаемых изображений, графической грамотности.
4. Формировать умения применять приёмы сравнения, обобщения, умозаключения.
5. Развивать пространственное воображение на основе изучения геометрических тел и их свойств.
6. Развивать умения применять полученные знания при решении задач.

Методический материал

1. Понятие тетраэдра.
2. Понятие параллелепипеда.
3. Свойства ребер, граней, диагоналей параллелепипеда.
4. Определение сечения в фигуре.
5. Метод следа.

Определение. Тетраэдр – это многогранник, состоящий из плоскости треугольника и точки не лежащий в этой плоскости, трех отрезков соединяющих эту точку с вершинами основания треугольника.



Тетраэдр состоит:
из вершин- их у него 4- *A, B, C, D;*
из ребер- их у него 6- *AB*, *BC*, *AC*, *AD*, *BD*, *CD*;
из граней- их у него 4- треугольники ΔABC, ΔDAC, ΔDBC, ΔDAB.
Говорят, что рёбра *AD* и *BC*, *AB* и *CD*, и т.д.- противоположные.
Считается ΔABC - основание, остальные грани - боковые.

Параллелепипед.
Рассмотрим два равных параллелограмма ABCD и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Давайте рассмотрим изображенную фигуру

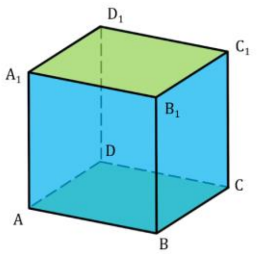


Рисунок 4 – параллелепипед и его диагонали

$ABCDA_1B_1C_1D_1$: поверхность, составленная из двух **равных параллелограммов** $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, лежащих в параллельных плоскостях и **четырёх параллелограммов**.

Все параллелограммы - **грани**, их стороны - **рёбра**, их вершины **- вершины параллелепипеда**.

Считается: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ - **основания**, остальные грани - **боковые**.

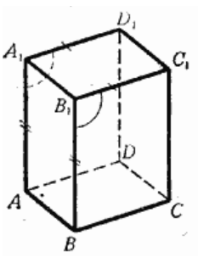
Определение. Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется диагональю параллелепипеда: A_1C, D_1B, AC_1, DB_1.

Определение. Параллелепипед- это шестигранник с параллельными и равными противоположными гранями.

Свойства параллелепипеда

Свойство 1 Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.
Доказательство

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грани BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, потому что две пересекающиеся прямые BB_1 и B_1C_1 одной грани параллельны двум пересекающимся прямым AA_1 и A_1D_1 другой; эти грани и равны, так как $B_1C_1 = A_1D_1$, $B_1B= A_1A$ (как противоположные стороны параллелограммов) и $<BB_1C_1= <AA_1D_1$.

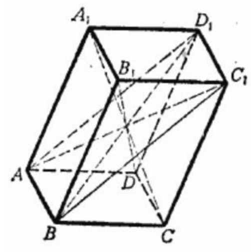


Свойство 2. Все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.
Доказательство

Возьмём какие-нибудь две диагонали, например AC_1 и BD_1, и проведём вспомогательные прямые AD_1 и BC_1.

Так как рёбра AB и D_1C_1 соответственно равны и параллельны ребру DC, то они равны и параллельны между собой; вследствие этого фигура AD_1C_1B есть параллелограмм, в котором прямые C_1A и BD_1 —диагонали, а в параллелограмме диагонали делятся в точке пересечения пополам.

Возьмём теперь одну из этих диагоналей, например AC_1, с третьей диагональю, положим, с B_1D. Совершенно так же мы можем доказать, что они делятся в точке пересечения пополам. Следовательно, диагонали B_1D и AC_1 и диагонали AC_1 и BD_1(которые мы раньше брали) пересекаются в одной и той же точке, именно в середине диагонали AC_1. Наконец, взяв эту же диагональ AC_1 с четвёртой диагональю A_1C, мы также докажем, что они делятся пополам. Значит, точка пересечения и этой пары диагоналей лежит в середине диагонали AC_1. Таким образом, все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной и той же точке и делятся этой точкой пополам.



Построение сечений

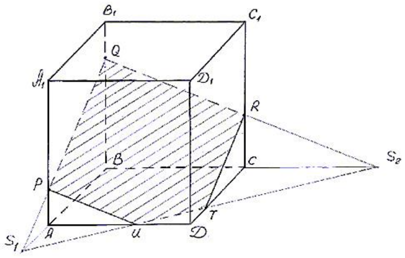
Основные правила построения сечений методом следа:

- Если даны (или уже построены) две точки плоскости сечения на одной грани многогранника, то след сечения этой плоскости – прямая, проходящая через эти три точки.
- Если дана (или уже построена) прямая пересечения плоскости сечения с основанием многогранника (след на основании) и есть точка, принадлежащая определенной боковой грани, то нужно определить точку пересечения данного следа с этой боковой гранью (точка пересечения данного следа с общей прямой основания и данной боковой грани)
- Точку пересечения плоскости сечения с основанием можно определить как точку пересечения какой-либо прямой в плоскости сечения с ее проекцией на плоскость основания.

То есть, суть метода заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры. Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Используя след, легко построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры.

Задача №1. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки P, Q, R .

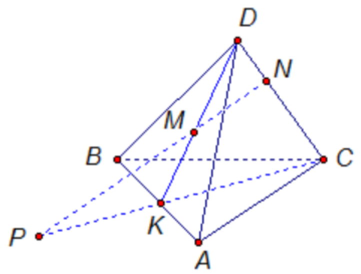
Решение.



1. Построим след секущей плоскости на плоскость нижнего основания параллелепипеда. Рассмотрим грань AA_1B_1B. В этой грани лежат точки сечения P и Q. Проведем прямую PQ.
2. Продолжим прямую PQ, которая принадлежит сечению, до пересечения с прямой AB. Получим точку S_1, принадлежащую следу.
3. Аналогично получаем точку S_2 пересечением прямых QR и BC.
4. Прямая S_1S_2 - след секущей плоскости на плоскость нижнего основания параллелепипеда.
5. Прямая S_1S_2 пересекает сторону AD в точке U, сторону CD в точке T. Соединим точки P и U, так как они лежат в одной плоскости грани AA_1D_1D. Аналогично получаем TU и RT.
6. PQRTU – искомое сечение.

Задача №2.

Дан тетраэдр ABCD. Точка M – точка внутренняя, точка грани тетраэдра ABD. N – внутренняя точка отрезка DC. Построить точку пересечения прямой NM и плоскости ABC.



Решение:
Для решения построим вспомогательную плоскость DMN . Пусть прямая DM пересекает прямую AB в точке K. Тогда, CKD – это сечение плоскости DMN и тетраэдра. В плоскости DMN лежит и прямая NM, и полученная прямая CK. Значит, если NM не параллельна CK, то они пересекутся в некоторой точке P. Точка P и будет искомая точка пересечения прямой NM и плоскости ABC.

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.
2. Просмотрите материал по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/5444/main/221490/
3. Выполните тренировочные задания по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/5444/train/221494/

Задачи

1. В тетраэдре $DABC$ дано: $\angle ADB = 54°$, $\angle BDC = 72°$, $\angle CDA = 90°$, $DA = 20$ см, $BD = 18$ см, $DC = 21$ см. Найдите: а) ребра основания ABC данного тетраэдра; б) площади всех боковых граней.
2. Точки M и N — середины ребер AB и AC тетраэдра $ABCD$. Докажите, что прямая MN параллельна плоскости BCD.
3. Изобразите тетраэдр $DABC$ и на ребрах DB, DC и BC отметьте соответственно точки M, N и K. Постройте точку пересечения: а) прямой MN и плоскости ABC; б) прямой KN и плоскости ABD.
4. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1, а также отрезок, по которому эти сечения пересекаются.

5. **Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D; б) точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости AB_1C_1.**

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение тетраэдра.
2. Сформулируйте определение параллелепипеда.
3. Сформулируйте свойства параллелепипеда.
4. Сформулируйте метод сечений.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Перпендикулярность прямой и плоскости

Цели практического занятия

1. Формирование представления перпендикулярных прямых в пространстве.
2. Формирование умения представлять прямую, перпендикулярную к плоскости, и решать задачи, применяя знания о перпендикулярности прямой и плоскости.
3. Формирование пространственного воображения, логического мышления, памяти, внимания, интереса к предмету.
4. Развитие творческой стороны мышления и навыков аналитической работы при выполнении проектной деятельности.

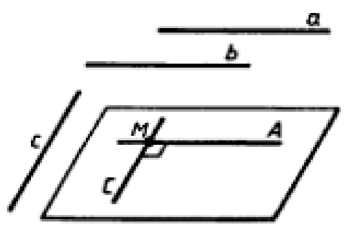
Методический материал

1. Понятие перпендикулярных прямых, прямой перпендикулярной к плоскости.
2. Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых третей.
3. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение. Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

*Определение.*Прямая называется **перпендикулярной** к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.



Доказательство: Дано: $a \parallel b$, $a \perp c$

Доказать: $b \perp c$

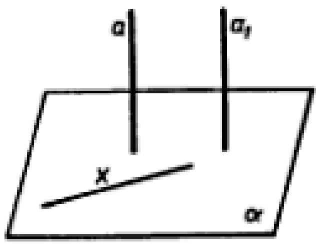
Через точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые MA и MC, параллельные соответственно прямым a и c. Так как $a \perp c$, то ∠AMC=90o.

Так как $b \parallel a$, а $a \parallel$ MA, то $b \parallel$ MA.

Итак, прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC, угол между ними равен 90o, т.е. b ∥ MA, c ∥ MC, угол между MA и MC равен 90o

Это означает, что угол между прямыми b и c также равен 90o, то есть b ⊥ c.

Теорема. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.



Доказательство: Дано: $a \parallel a_1$, $a \perp \alpha$

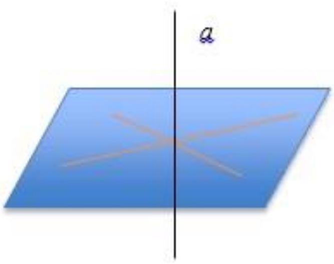
Доказать, что $a_1 \perp \alpha$

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α, т.е. $x \in \alpha$.Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$.

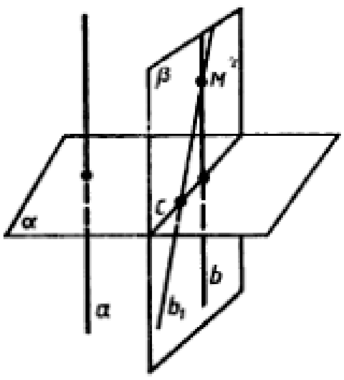
По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp x$.

Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т. е. $a1 \perp \alpha$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости



Теорема о прямой перпендикулярной к плоскости. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.



Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.

2. Просмотрите материалы по ссылке:
https://resh.edu.ru/subject/lesson/4724/main/20415/

https://resh.edu.ru/subject/lesson/4757/main/20570/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке:
https://resh.edu.ru/subject/lesson/4724/main/20415/

https://resh.edu.ru/subject/lesson/4757/train/20574/

Задачи

1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что:
а) $DC \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$, если $\angle BAD = 90°$;
б) $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$, если $AB \perp DD_1$.

2. В тетраэдре $ABCD$ $BC \perp AD$. Докажите, что $AD \perp MN$, где M и N — середины ребер AB и AC.

3. Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в плоскости α. Какие из следующих углов являются прямыми: $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DAM$, $\angle DOA$, $\angle BMO$?

4. Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что: а) $AB = DB$; б) $AB = AC$, если $OB = OC$; в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

5. Через точку O пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна a, проведена прямая OK, перпендикулярная к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки K до вершин квадрата, если $OK = b$.

6. В треугольнике ABC дано: $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана. Через вершину C проведена прямая CK, перпендикулярная к плоскости треугольника ABC, причем $CK = 12$ см. Найдите KM.

7. Прямая CD перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC. Через центр O этого треугольника проведена прямая OK, параллельная прямой CD. Известно, что $AB = 16\sqrt{3}$ см, $OK = 12$ см, $CD = 16$ см. Найдите расстояния от точек D и K до вершин A и B треугольника.

8. Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие ее соответственно в точках P_1 и Q_1. Найдите P_1Q_1, если $PQ = 15$ см, $PP_1 = 21{,}5$ см, $QQ_1 = 33{,}5$ см.

9. Прямая MB перпендикулярна к сторонам AB и BC треугольника ABC. Определите вид треугольника MBD, где D — произвольная точка прямой AC.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение перпендикулярных прямых.
2. Сформулируйте определение прямой, перпендикулярной плоскости.
3. Сформулируйте лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей прямой.
4. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

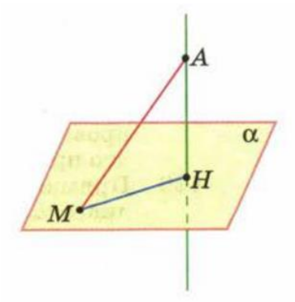
Цели практического занятия

1. Сформировать основные понятия перпендикуляра, наклонной, проекции наклонной, расстояния от точки до плоскости.
2. Рассмотреть свойства наклонных и их проекций.
3. Рассмотреть связь между перпендикуляром, наклонной и проекцией наклонной, закрепить эти понятия в ходе решения задач.
4. Развить логическое мышление, память, пространственное воображение, познавательный интерес.
5. Расширить представления учащихся об окружающем мире.

Методический материал

1. Наклонная. Проекция.
2. Расстояние от точки до плоскости.
3. Теорема о трех перпендикулярах.
4. Угол между прямой и плоскостью.

Рассмотрим плоскость α и точку A, не лежащую в этой плоскости. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную к плоскости α, и обозначим буквой Н точку пересечения этой прямой с плоскостью α. Отрезок АН называется перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости α, а точка Н — основанием перпендикуляра. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку M, отличную от Н, и проведем отрезок АМ. Он называется наклонной, проведенной из точки A к плоскости α, а точка M – основанием наклонной. Отрезок НМ называется проекцией наклонной на плоскость α.



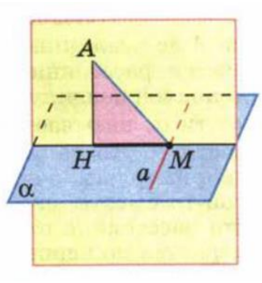
Рассмотрим прямоугольный треугольник AMH. Сторона AH — катет, а сторона AM — гипотенуза, поэтому $AH < AM$. Поэтому перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.

Следовательно, из всех расстояний от точки А до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки Н. Это расстояние, т. е. длина перпендикуляра, проведенного из точки А к плоскости α, называется расстоянием от точки А до плоскости α.

Стоит отметить, что в случае двух параллельных плоскостей, расстоянием между ними будет расстояние от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости. Например, все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Если же прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости. В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью. Например, все точки прямой b равноудалены от потолка комнаты.

Если мы имеем дело со скрещивающимися прямыми, то расстоянием между ними будет расстояние между одной из этих прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой.

Сформулируем **теорему о трех перпендикулярах**: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.



(Рис. 2)

На рисунке 2: AH — перпендикуляр к плоскости α, AM — наклонная, a — прямая, проведенная в плоскости α через точку M перпендикулярно к проекции наклонной HM. Докажем, что прямая a перпендикулярна наклонной AM.

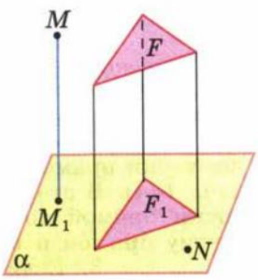
Рассмотрим плоскость AMH. Прямая a перпендикулярна к HM по условию. Так как прямая a, лежит в плоскости α, а эта плоскость перпендикулярна отрезку AH, то прямая a перпендикулярна к этой плоскости. Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности прямая a перпендикулярна отрезку AM. Теорема доказана.

Эта теорема называется теоремой о трех перпендикулярах, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами AH, HM и AM.

Справедлива также обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Введем теперь понятие проекции произвольной фигуры на плоскость. Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

Обозначим буквой F какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру $F1$, которая называется проекцией фигуры F на данную плоскость (рис. 3).



(Рис. 3)

Докажем теперь, что проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая (рис. 4).

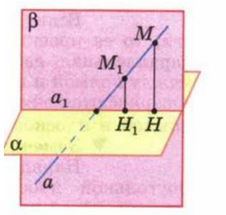
Данную плоскость обозначим буквой α. Произвольную прямую, не перпендикулярную к плоскости, обозначим буквой a. Из какой-нибудь точки M прямой a проведем перпендикуляр MH к плоскости α и рассмотрим плоскость β, проходящую через прямую a и перпендикуляр MH. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой $a1$.

Докажем, что эта прямая и является проекцией прямой *a* на плоскость α. В самом деле, возьмем произвольную точку М*1* прямой *a* и проведем в плоскости *β* прямую *M1H1*, параллельную прямой *MH*.

Так как отрезок *MH* перпендикуляр к плоскости α и отрезок МН параллелен *M1H1*, то отрезок *M1H1* тоже перпендикулярен плоскости α.

Этим мы доказали, что проекция произвольной точки прямой *a* лежит на прямой *a1*.

Аналогично доказывается, что любая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой *a*. Следовательно, прямая a_1 — проекция прямой *a* на плоскость α. Что и требовалось доказать.

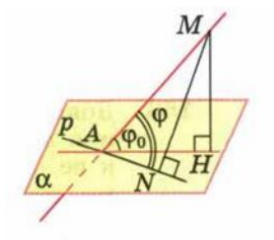


(Рис. 4)

Теперь введем понятие угла между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Пример 1. Докажем, что угол между $\varphi 0$ между данной прямой АМ и плоскостью α является наименьшим из всех углов φ, которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку А.



(Рис. 5)

Обозначим буквой *H* основание перпендикуляра (рис. 5), проведенного из точки *M* к плоскости α.

Рассмотрим произвольную прямую *p* в плоскости α, проходящую через точку *A* и отличную от прямой *AH*.

Угол между прямыми *AM* и *p* обозначим через φ.

Докажем, что φ больше чем $\varphi 0$.

Из точки M проведем перпендикуляр MN к прямой p. Если точка N совпадает с точкой A, то φ равняется 90 градусам и поэтому φ больше чем φ 0. Рассмотрим случай, когда точки A и N не совпадают. Отрезок AM — общая гипотенуза прямоугольных

треугольников ANM и AHM, поэтому sin φ =MN/AM

$$\sin\varphi_0 = \frac{MH}{AM}$$

Так как наклонная MN больше, чем перпендикуляр MH, то синус угла φ больше, чем синус угла $\varphi 0$. Поэтому угол φ больше, чем угол $\varphi 0$. Что и требовалось доказать.

Тестовый вопрос №7. Прямая AM перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ABC, точка H середина стороны BC. Найдите угол между прямой MH и плоскостью ABC, если $AM = a$, $HB = a$.

Решение. Искомый угол – MHA.

Рассмотрим треугольник ABC. Он равносторонний. Это означает, что его медиана так же является высотой и биссектрисой. Так как HB = a, следовательно, любая сторона треугольника имеет длину $2a$. Рассмотрим треугольник AHB. Он прямоугольный, т.к. AH медиана и высота. По теореме Пифагора вычислим длину стороны AH: $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = a\sqrt{3}$.

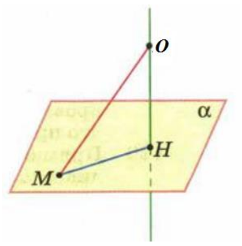
Далее рассмотрим треугольник MHA, он прямоугольный, т.к. MA перпендикулярна плоскости ABC. Зная это мы можем выразить тангенс искомого угла: $tgMHA = \frac{MA}{HA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.. Отсюда делаем вывод, что искомый угол равен 30 градусов.

Ответ: $\angle MHA = 30^{\circ}$.

Тестовый вопрос №8. Из точки O к плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 15 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка O?

Решение. Нарисуем рисунок. OH – перпендикуляр, OM – наклонная, длина которой 17 см, MH – проекция наклонной, длина которой 15 см.

Треугольник OHM – прямоугольный, т.к. OH – перпендикуляр. Поэтому OH – искомое расстояние. Найдем его по теореме Пифагора: $OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = 8$ сантиметров.



Ответ: 8 сантиметров.

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.
2. Просмотрите материалы по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6127/main/221522/
3. Выполните тренировочные задания по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6127/train/221528/

Задачи

1. Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен φ. а) Найдите наклонную и ее проекцию на данную плоскость, если перпендикуляр равен d. б) Найдите перпендикуляр и проекцию наклонной, если наклонная равна m.
2. Из некоторой точки проведены к плоскости две наклонные. Докажите, что: а) если наклонные равны, то равны и их проекции; б) если проекции наклонных равны, то равны и наклонные; в) если наклонные не равны, то бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию.
3. Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AO и две равные наклонные AB и AC. Известно, что $\angle OAB = \angle BAC = 60°$, $AO = 1{,}5$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.
4. Один конец данного отрезка лежит в плоскости α, а другой находится от нее на расстоянии 6 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости α.
5. Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 1 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α.
6. Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 4 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если $AB = 6$ см.
7. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная к плоскости треугольника. а) Докажите, что треугольник CBD прямоугольный. б) Найдите BD, если $BC = a$, $DC = b$.
8. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AD = 12$ см. Найдите расстояния от концов отрезка AD до прямой BC.
9. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см. Найдите: а) расстояние от точки K до плоскости прямоугольника $ABCD$; б) расстояние между прямыми AK и CD.
10. Наклонная AM, проведенная из точки A к данной плоскости, равна d. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен: а) 45°; б) 60°; в) 30°?

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение проекции и наклонной.
2. Что называется рсстоянием между прямой и плоскостью, между плоскостями.
3. Сфлрмулируйте теорему о трех перпендикулярах
4. Что называется углом между прямой и плоскостью?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.

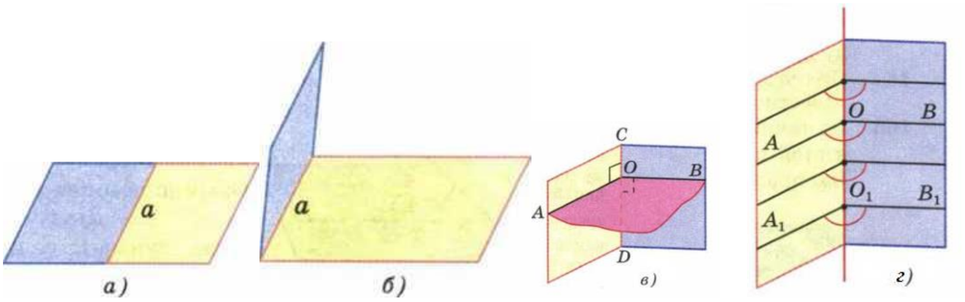
Цели практического занятия

1. Ввести понятия двугранного угла, линейного угла двугранного угла, определение перпендикулярных плоскостей.
2. Рассмотреть признак перпендикулярности двух плоскостей.
3. Развивать пространственное воображение и логическое мышление, внимание.
4. Формировать навык построения линейного угла между пересекающимися плоскостями, навык применения новых понятий в решении задач.

Методический материал

1. Двугранный угол.
2. Линейный угол двугранного угла.
3. Признак перпендикулярности плоскостей.

Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей в виде прямой a, не принадлежащими одной плоскости. Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями. Прямая a, которая является общей границей полуплоскостей, называется ребром двугранного угла (рис. 1а и 1б).



(Рис. 1)

Двугранный угол с ребром CD, на разных гранях которого отмечены точки A и B называют двугранным углом $CABD$.

Перпендикуляры к ребру AO и BO образуют линейный угол двугранного угла AOB (рис. 1в). Так как луч ОА перпендикулярен прямой CD и луч ОВ перпендикулярен прямой CD, то плоскость АОВ перпендикулярна к прямой CD. Таким образом, плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла. Двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов

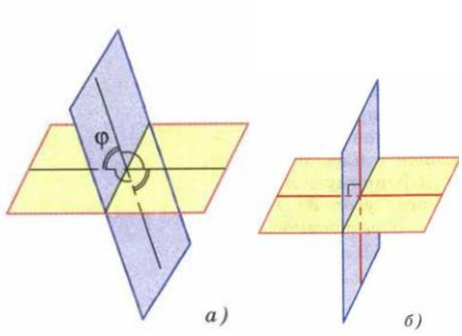
Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. Так же как и плоские углы, двугранные углы могут быть прямыми, острыми и тупыми.

Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Рассмотрим два линейных угла АОВ и $A_1O_1B_1$ (рис. 1г). Лучи ОА и O_1A_1, лежат в одной грани и перпендикулярны к прямой OO_1, поэтому они сонаправлены. Точно так же сонаправлены лучи ОВ и O_1B_1. Поэтому углы АОВ и $A_1O_1B_1$ равны как углы с сонаправленными сторонами.

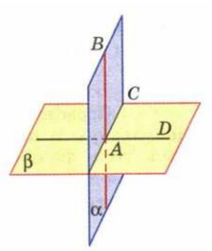
Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром.

Если один из этих двугранных углов равен φ то другие три угла равны соответственно $180° - \varphi$, φ и $180° - \varphi$ (рис. 2 а). В частности, если один из углов прямой, то и остальные три угла прямые. *Определение.* Если угол между пересекающимися плоскостями равен 90 градусом, будем называть такие плоскости **перпендикулярными** (рис. 2б).



(Рис. 2)

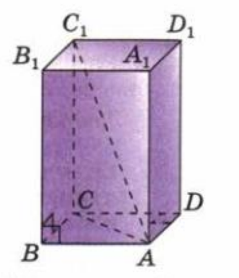
Теорема (признак перпендикулярности плоскостей) Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.



(Рис. 3)

Для доказательства теоремы рассмотрим плоскости α и β такие (рис. 3), что плоскость α проходит через прямую AB, перпендикулярную к плоскости β и пересекающуюся с ней в точке A. Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой AC. При этом прямая AB перпендикулярна прямой AC, так как по условию прямая AB перпендикулярна плоскости β, это означает, что прямая AB перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β.
Проведем в плоскости β прямую AD, перпендикулярную к прямой AC. Тогда угол BAD — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β. Но угол BAD равен 90 градусов так как прямая AB перпендикулярна плоскости β. Следовательно, угол между плоскостями α и β равен 90 градусов. Что и требовалось доказать.

Следствие: Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.



(Рис. 4)

На рисунке 4 представлен прямоугольный параллелепипед. У этой фигуры все боковые ребра перпендикулярны основанию.

Его основаниями служат прямоугольники ABCD и $A_1B_1C_1D_1$, а боковые ребра AA_1,BB_1,CC_1 и DD_1 перпендикулярны к основаниям. Отсюда следует, что ребро AA_1 перпендикулярно к ребру AB, т. е. боковая грань AA_1B_1B является прямоугольником. То же самое можно сказать и об остальных боковых гранях.

Таким образом, прямоугольный параллелепипед обладает следующими свойствами:

1) В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней — прямоугольники.

2) Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда — прямые.

3) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Измерениями прямоугольного параллелепипеда называются длины трех ребер, имеющих общую вершину.

Докажем последнее свойство.

Так как ребро CC_1 перпендикулярно к основанию $ABCD$, то угол ACC_1, прямой. Из прямоугольного треугольника ACC_1, по теореме Пифагора получаем

$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$.

Но AC — диагональ прямоугольника $ABCD$, поэтому $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Кроме того, ребро $CC_1 = AA_1$. Следовательно, $AC_1 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$. Что и требовалось доказать.

Следствием из этого свойства является то, что диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Стоит отметить, что если у прямоугольного параллелепипеда все три измерения равны, то он называется **кубом**, а все его грани являются равными друг другу квадратами.

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.

2. Просмотрите материалы по ссылке:
https://resh.edu.ru/subject/lesson/4748/main/20814/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке:
https://resh.edu.ru/subject/lesson/4748/train/20818/

Задачи

1. Неперпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN. В плоскости β из точки A проведен перпендикуляр AB к прямой MN и из той же точки A проведен перпендикуляр AC к плоскости α. Докажите, что $\angle ABC$ — линейный угол двугранного угла $AMNC$.
2. В тетраэдре $DABC$ все ребра равны, точка M — середина ребра AC. Докажите, что $\angle DMB$ — линейный угол двугранного угла $BACD$.
3. Двугранный угол равен φ. На одной грани этого угла лежит точка, удаленная на расстояние d от плоскости другой грани. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

4. Из вершины B треугольника ABC, сторона AC которого лежит в плоскости α, проведен к этой плоскости перпендикуляр BB_1. Найдите расстояния от точки B до прямой AC и до плоскости α, если $AB = 2$ см, $\angle BAC = 150°$ и двугранный угол $BACB_1$ равен $45°$.

5. Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости α, а катет наклонен к этой плоскости под углом $30°$. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью треугольника.

6. Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, а угол между плоскостями α и ABC равен $60°$. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AC = 5$ см, $AB = 13$ см.

7. Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC, $AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

8. Докажите, что если все ребра тетраэдра равны, то все его двугранные углы также равны. Найдите эти углы.

9. Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость ADM так, что двугранный угол $BADM$ равен $60°$. Найдите сторону ромба, если $\angle BAD = 45°$ и расстояние от точки B до плоскости ADM равно $4\sqrt{3}$.

10. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Через некоторую точку плоскости α проведена прямая, перпендикулярная к плоскости β. Докажите, что эта прямая лежит в плоскости α.

11. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 1, 1, 2; б) 8, 9, 12; в) $\sqrt{39}$, 7, 9.

12. Найдите тангенс угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.

13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $D_1B = d$, $AC = m$, $AB = n$. Найдите расстояние между: а) прямой A_1C_1 и плоскостью ABC; б) плоскостями ABB_1 и DCC_1; в) прямой DD_1 и плоскостью ACC_1.

14. Ребро куба равно a. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими: а) диагональ куба и ребро куба; б) диагональ куба и диагональ грани куба.

15. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1 = 12$ см и диагональ BD_1 составляет с плоскостью грани AA_1D_1D угол в $30°$, а с ребром DD_1 — угол в $45°$.

16. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро AA_1 и перпендикулярной к плоскости BB_1D_1; б) ребро AB и перпендикулярной к плоскости CDA_1.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение двугранного угла.
2. Что называется линейным углом двугранного угла?
3. Какие плоскости называются перпендикулярными?
4. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
5. Что такое прямоугольный параллелепипед?
6. Какими свойствами обладает прямоугольный параллелепипед?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Вектор в пространстве.

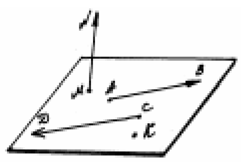
Цели практического занятия

1. Познакомиться с основными понятиями, используемыми в данной теме.
2. Сформировать представление о векторных и скалярных величинах.
3. Научиться выполнять действия с векторами, преобразовывать векторные выражения.
4. Научится различать векторные и скалярные величины.
5. Научится выполнять действия с векторами в пространстве и применять законы действий с векторами для преобразования и упрощения векторных выражений.

Методический материал

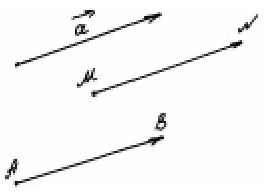
1. Понятие вектора.
2. Коллинеарные векторы.
3. Действия с векторами.

1)Вектором называется отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой - концом.



КК - нулевой вектор, обозначается $\vec{0}$. Длина вектора $\overline{AB}$ обозначается $|\overline{AB}|$.

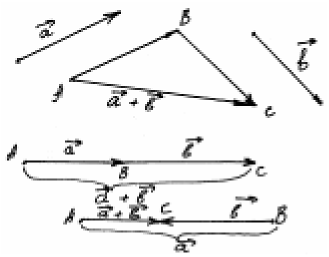
2)Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной или на параллельных прямых. Пусть два ненулевых вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарные. Если при этом лучи AB и CD сонаправлены, то $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются сонаправленными, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются противоположно направленными. Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором. Запись $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$ означает, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены, а запись $\overline{c}\uparrow\downarrow\overline{d}$ - что векторы c и d противоположно направлены.



3)Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны. От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Интерактивная модель "Равные, противоположные, нулевые, сонаправленные, противоположно направленные векторы ".

4)Действия над векторами. Сложение векторов по правилу треугольника.



Для этого нужно от произвольной точки пространства отложить вектор $\overline{AB}$, равный $\bar{a}$, затем от точки В отложить вектор $\overline{BC}$, равный $\bar{b}$. Вектор $\overline{AC}$ называется суммой $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Для любых трех точек А, В и С имеет место равенство $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

5)Сложение векторов по правилу параллелограмма:

Для этого векторы откладывают от одной точки. Это правило пояснено на рисунке.

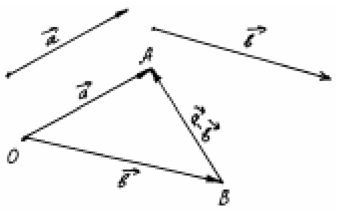
Интерактивная модель "Законы действия с векторами".

Сумма нескольких векторов в пространстве находится так же, как и на плоскости и не зависит от порядка слагаемых.

Интерактивная модель "Правило многоугольника".

6)Два ненулевых вектора называются противоположными, если их длины равны и они противоположно направлены.

7)Вычитание векторов: Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\bar{b}$ равна вектору $\bar{a}$.
Разность $\bar{a}$ - $\bar{b}$ можно найти по формуле $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$, где $(-\bar{b})$ - вектор, противоположный вектору $\bar{b}$.
$\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$.



8)Умножение вектора на число. Произведением ненулевого вектора $\bar{a}$ на число k называется такой вектор $\bar{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\bar{a}|$, причем векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены при $k\geq 0$ и противоположно направлены при $k<0$. Произведением нулевого вектора на произвольное число считается нулевой вектор.
Произведение вектора $\bar{a}$ на число k обозначается так: $k\bar{a}$. Из определения произведения вектора на число следует, что для любого числа k и любого вектора $\bar{a}$ векторы $\bar{a}$ и $k\bar{a}$ коллинеарны. Из этого же определения следует, что произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор.
Для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:
$(kl)\bar{a} = k(l\bar{a})$ (сочетательный закон);

$k(\bar{a}+\bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$ (первый распределительный закон); $(k+l)\bar{a} = k\bar{a} + l\bar{a}$ (второй распределительный закон).

Лемма. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и вектор $\bar{a}$ не равен нулевому вектору, то существует число k такое, что вектор $\bar{b}$ равен $k\bar{a}$.

Интерактивная модель "Законы действия с векторами".

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.
2. Просмотрите материалы по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4758/main/21652/
3. Выполните тренировочные задания по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4758/train/21660/

Задачи

1. В тетраэдре $ABCD$ точки M, N и K — середины ребер AC, BC и CD соответственно, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $BD = 5$ см. Найдите длины векторов:
а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{NK}$;
б) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{KN}$.

2. Измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют длины: $AD = 8$ см, $AB = 9$ см и $AA_1 = 12$ см. Найдите длины векторов:
а) $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$;
б) $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB_1}$.

3. На рисунке 104 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и K — середины ребер B_1C_1 и A_1D_1. Укажите на этом рисунке все пары:
а) сонаправленных векторов;
б) противоположно направленных векторов;
в) равных векторов.

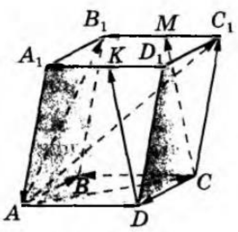


Рис. 104

4. На рисунке 105 изображен тетраэдр $ABCD$, ребра которого равны. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, AD, DC, BC.
а) Выпишите все пары равных векторов, изображенных на этом рисунке. б) Определите вид четырехугольника $MNPQ$.

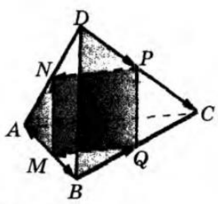


Рис. 105

5. Справедливо ли утверждение:
а) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, коллинеарны между собой; б) два вектора, сонаправленные с ненулевым вектором, сонаправлены; в) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, сонаправлены?

6. Известно, что $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$. Как расположены по отношению друг к другу:
а) прямые AB и A_1B_1; б) прямая AB и плоскость, проходящая через точки A_1 и B_1; в) плоскости, одна из которых проходит через точки A и B, а другая проходит через точки A_1 и B_1?

7. На рисунке 104 изображен параллелепипед, точки M и K — середины ребер B_1C_1 и A_1D_1. Назовите вектор, который получится, если отложить:
а) от точки C вектор, равный $\overrightarrow{DD_1}$; б) от точки D вектор, равный $\overrightarrow{CM}$; в) от точки A_1 вектор, равный $\overrightarrow{AC}$; г) от точки C_1 вектор, равный $\overrightarrow{CB}$; д) от точки M вектор, равный $\overrightarrow{KA_1}$.

8. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.

9. Назовите все векторы, образованные ребрами параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, которые: а) противоположны вектору $\overrightarrow{CB}$; б) противоположны вектору $\overrightarrow{B_1A}$; в) равны вектору $-\overrightarrow{DC}$; г) равны вектору $-\overrightarrow{A_1B_1}$.

10. Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и обозначьте векторы $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AD}$ соответственно через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Изобразите на рисунке векторы: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{c}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$; г) $\vec{c}-\vec{b}$; д) $\vec{c}-\vec{a}$.

11. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, а O — произвольная точка пространства. Докажите, что: а) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$; б) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$.

12. В пространстве даны четыре точки A, B, C и D. Назовите вектор с началом и концом в данных точках, равный сумме векторов: а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$; б) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{DC}$.

13. Упростите выражение: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM}$; б) $\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{QK} + \overrightarrow{PF}$; в) $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MP}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{NM}$.

Контрольные вопросы:

1. Что такое вектор?
2. Какие векторы называются коллинеарными? Сонаправленными?
3. Дайте определение суммы векторов.
4. Сформулируйте понятие умножения вектора на число.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Координаты в пространстве. Система координат

Цели практического занятия

1. Сформировать понятие системы координат и координаты точки в пространстве, научить строить точку по заданным её координатам и находить координаты точки, изображённой в заданной системе координат.
2. Способствовать развитию пространственного воображения обучающихся, умения развивать аналогии и сравнения, логического мышления.

Методический материал

1. Прямоугольная система координат в пространстве.
2. Координаты вектора, радиус-вектор.
3. Координаты середины отрезка, длина вектора, расстояние между точками.

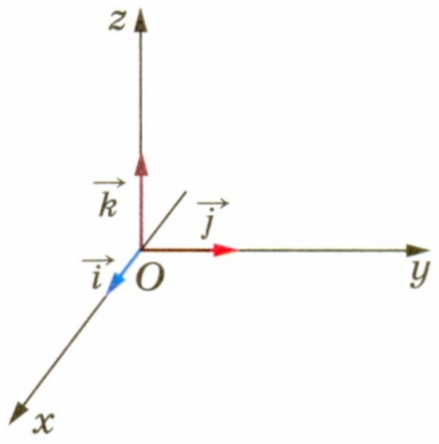
Рис. 121

Точка O разделяет каждую из осей координат на два луча.

Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью**, а другой луч **отрицательной полуосью**. Плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy, Oyz, Ozx.

Прямоугольная система координат в пространстве задана, если выбрана точка – начало координат, через эту точку проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и задана единица измерения отрезков (рис. 121). Прямые с выбранными на них направлениями называются осями координат, а их общая точка – началом координат.

Координаты вектора



Зададим в пространстве прямоугольную систему координат Oxyz. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат **единичный вектор**, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через единичный вектор оси абсцисс, через – единичный вектор оси ординат и через – единичный вектор оси аппликат (рис. 124). Векторы , , – назовем **координатными векторами**. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому **любой вектор a и можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде**

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причем коэффициенты разложения *x, y, z* определяются единственным образом.

Коэффициенты x, y и z в разложении вектора по координатным векторам называются координатами вектора в данной системе координат. Координаты вектора будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: {x; y; z}.

Нулевой вектор можно представить в виде $\bar{o} = 0 \cdot \bar{\imath} + 0 \cdot \bar{\jmath} + 0 \cdot \bar{k}$ так как все координаты нулевого вектора равны нулю.

Так как нулевой вектор можно представить в виде то все координаты нулевого вектора равны нулю. Далее, **координаты равных векторов соответственно равны**, т. е. если векторы $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\{x_2, y_2, z_2)$ равны, то $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$

Рассмотрим **правила,** которые позволяют по координатам данных векторов найти координаты их суммы и разности, а также координаты произведения данного вектора на данное число.

1)Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\{x_2, y_2, z_2\}$ — – данные векторы, то вектор + имеет координаты $\{x_1+x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$.

2)Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если $\{x_1, y_1, z_1\}$ и b$\{x_2\ y_2;\ z_2\}$ – данные векторы, то вектор – имеет координаты $\{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$.

3)Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Другими словами, если {x; y; x} – данный вектор, α – данное число, то вектор α имеет координаты {αx; αy; αz).

1)Признак коллинеарности векторов: Для того, чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них был произведением другого на некоторое число.

Следствие: ненулевой вектор коллинарен вектору тогда и только тогда, когда существует такое число α, что =α .

Определение: Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

2)Признак компланарности трех векторов: если вектор можно разложить по векторам и , т. е. представить в виде = x + y , где x и y — – некоторые числа, то векторы , и компланарны.

Определение: Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало - с началом координат, называется **радиус-вектором данной точки**.

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

Рис. 129

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Длина вектора вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Нахождение середины отрезка

Дано: $A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$, C – середина AB. Найти: $C(x; y; z)$.

Решение: Обозначим в пространстве точки A, B и C – середину отрезка AB. (См. Рис. 1.)

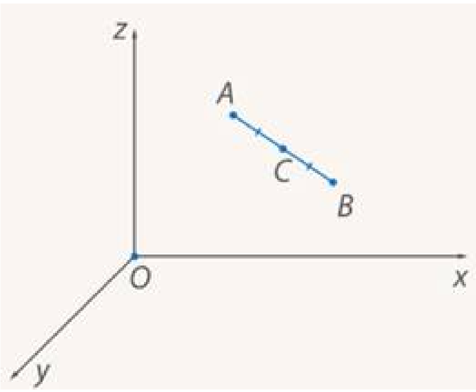


Рис. 1. Ввели систему координат

Вектор $\overrightarrow{OC}$ является половиной суммы векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, потому что OC – это половина диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. (См. Рис. 2.)

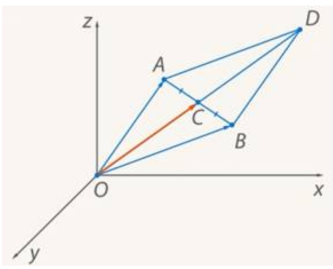


Рис. 2. Использование правила параллелограмма

Так как $\overrightarrow{OA}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\overrightarrow{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$, и $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ (по правилу параллелограмма),

то значит:

$$\overrightarrow{OC}\left\{\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right\}$$

Осталось заметить, что координаты точки C совпадают с координатами вектора OC, так как O – начало координат. То есть $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Таким образом, координаты середины отрезка есть полусуммы соответствующих координат его концов.

Можно было действовать и иначе: $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Координаты вектора AB мы знаем, значит, можем найти координаты вектора AC, а отсюда, зная координаты начала этого вектора A, находим координаты конца – C.

Ответ: $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Пример 1.

Выделите цветом верный ответ:

Дано: A (2; −1; 0), B (−3; 2; 1), C (1; 1; 4); CD = -2AB.

Найти: координаты точки D.

Варианты ответов:

(3; -1; 8)

(11, −5, 2)

(-6; 3; 11)

(8; 4; 2)

Решение:

Пусть D (x; y; z)

$\overline{CB}\{-4; 1; -3\}$

$\overline{AD}\{x - 2; y + 1; z\}, 2\overline{AD}\{2x - 4; 2y + 2; 2z\}$

$\overline{CB}\{-4; -1; -3\}, \overline{CB} = 2\overline{AD}$

поэтому $2x - 4 =$ 18

Правильные ответы:

(3; -1; 8)

(11, −5, 2)

(-6; 3; 11)

(8; 4; 2)

Пример 2.

Дано: координаты точек: A (3; −1; 2), B (x;); координаты вектора

Рис. 127

AB{5; 8; 1}

Найти: x, y, z

Решение:

Решаем уравнения и получаем: x=8; y= ; z=3, z=-1

Ответ: x=8; y= ; z=3, z=-1

Практическая часть

1. Выучите определения и правила.
2. Просмотрите материалы по ссылке:

https://resh.edu.ru/subject/lesson/5724/main/21896/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке:

https://resh.edu.ru/subject/lesson/5724/train/21900/

Задачи

637 Даны точки $A(3;\ -1;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ -7)$, $C(2;\ 0;\ 0)$, $D(-4;\ 0;\ 3)$, $E(0;\ -1;\ 0)$, $F(1;\ 2;\ 3)$, $G(0;\ 5;\ -7)$, $H(-\sqrt{5};\ \sqrt{3};\ 0)$. Какие из этих точек лежат на: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) оси аппликат; г) плоскости Oxy; д) плоскости Oyz; е) плоскости Oxz?

638 Найдите координаты проекций точек $A(2;\ -3;\ 5)$, $B\left(3;\ -5;\ \frac{1}{2}\right)$ и $C\left(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$ на: а) координатные плоскости Oxz, Oxy и Oyz; б) оси координат Ox, Oy и Oz.

639 Даны координаты четырёх вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 1)$, $D(0;\ 1;\ 0)$ и $A_1(1;\ 0;\ 0)$. Найдите координаты остальных вершин куба.

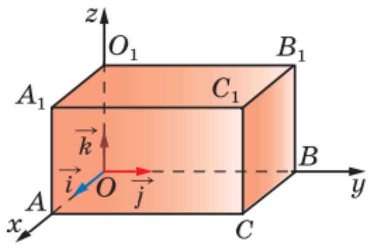


Рис. 185

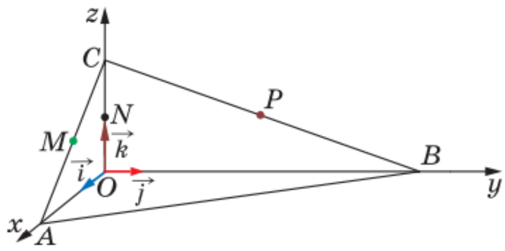


Рис. 186

640 Запишите координаты векторов: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{m} = \vec{k} - \vec{i}$, $\vec{n} = 0{,}7\vec{k}$.

641 Даны векторы $\vec{a}\{5;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\{-3;\ -1;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ -1;\ 0\}$, $\vec{d}\{0;\ 0;\ 0\}$. Запишите разложения этих векторов по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

642 На рисунке 185 изображён прямоугольный параллелепипед, у которого $OA = 2$, $OB = 3$, $OO_1 = 2$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{O_1C}$ в системе координат $Oxyz$.

644 Даны векторы $\vec{a}\{3; -5; 2\}$, $\vec{b}\{0; 7; -1\}$, $\vec{c}\left\{\frac{2}{3}; 0; 0\right\}$ и $\vec{d}\{-2{,}7; 3{,}1; 0{,}5\}$.

Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} + \vec{c}$; в) $\vec{b} + \vec{c}$; г) $\vec{d} + \vec{b}$; д) $\vec{d} + \vec{a}$; е) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; ж) $\vec{b} + \vec{a} + \vec{d}$; з) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

645 По данным рисунка 186 найдите координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$, если $OA = 4$, $OB = 9$, $OC = 2$, а M, N и P — середины отрезков AC, OC и CB.

646 Даны векторы $\vec{a}\{5; -1; 1\}$, $\vec{b}\{-2; 1; 0\}$, $\vec{c}\{0; 0{,}2; 0\}$ и $\vec{d}\left\{-\frac{1}{3}; 2\frac{2}{5}; -\frac{1}{7}\right\}$.

Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{b} - \vec{a}$; в) $\vec{a} - \vec{c}$; г) $\vec{d} - \vec{a}$; д) $\vec{c} - \vec{d}$; е) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; ж) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; з) $2\vec{a}$; и) $-3\vec{b}$; к) $-6\vec{c}$; л) $-\frac{1}{3}\vec{d}$; м) $0{,}2\vec{b}$.

647 Даны векторы $\vec{a}\{-1; 2; 0\}$, $\vec{b}\{0; -5; -2\}$ и $\vec{c}\{2; 1; -3\}$. Найдите координаты векторов $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}$ и $\vec{q} = 3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a}$.

648 Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\{0;\ 2;\ -2\}$, $\vec{c}\{-3;\ 2;\ 0\}$ и $\vec{d}\{-2;\ 1;\ -2\}$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$; б) $-\vec{a} + 2\vec{c} - \vec{d}$; в) $0{,}1\vec{a} + 3\vec{b} + 0{,}7\vec{c} - 5\vec{d}$; г) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b}) + 2(\vec{a} - \vec{b})$.

649 Найдите координаты векторов, противоположных следующим векторам: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{a}\{2; 0; 0\}$, $\vec{b}\{-3; 5; -7\}$, $\vec{c}\{-0{,}3; 0; 1{,}75\}$.

650 Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}\{3; 6; 8\}$ и $\vec{b}\{6; 12; 16\}$; б) $\vec{c}\{1; -1; 3\}$ и $\vec{d}\{2; 3; 15\}$; в) $\vec{i}\{1; 0; 0\}$ и $\vec{j}\{0; 1; 0\}$; г) $\vec{m}\{0; 0; 0\}$ и $\vec{n}\{5; 7; -3\}$; д) $\vec{p}\left\{\frac{1}{3}; -1; 5\right\}$ и $\vec{q}\{-1; -3; -15\}$?

Решение

а) Координаты вектора $\vec{a}\{3;\ 6;\ 8\}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{b}\{6;\ 12;\ 16\}$: $\frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16} = k$, где $k = \frac{1}{2}$. Поэтому $\vec{a} = k\vec{b}$, и, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

б) Координаты вектора $\vec{c}\{1;\ -1;\ 3\}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{d}\{2;\ 3;\ 15\}$, например $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{3}$. Поэтому векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$

не коллинеарны. В самом деле, если предположить, что векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\vec{c}=k\vec{d}$. Но тогда координаты вектора $\vec{c}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{d}$, что противоречит условию задачи.

651 Найдите значения m и n, при которых следующие векторы коллинеарны: а) $\vec{a}\{15; m; 1\}$ и $\vec{b}\{18; 12; n\}$; б) $\vec{c}\{m; 0{,}4; -1\}$ и $\vec{d}\left\{-\frac{1}{2}; n; 5\right\}$.

663 Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(-1;\ 0;\ 2)$, $B(1;\ -2;\ 3)$; б) $A(-35;\ -17;\ 20)$, $B(-34;\ -5;\ 8)$.

664 Найдите длины векторов: $\vec{a}\{5;\ -1;\ 7\}$, $\vec{b}\{2\sqrt{3};\ -6;\ 1\}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{d}=-2\vec{k}$, $\vec{m}=\vec{i}-2\vec{j}$.

665 Даны векторы $\vec{a}\{3; -2; 1\}$, $\vec{b}\{-2; 3; 1\}$ и $\vec{c}\{-3; 2; 1\}$. Найдите: а) $|\vec{a}+\vec{b}|$; б) $|\vec{a}|+|\vec{b}|$; в) $|\vec{a}|-|\vec{b}|$; г) $|\vec{a}-\vec{b}|$; д) $|3\vec{c}|$; е) $\sqrt{14}\,|\vec{c}|$; ж) $|2\vec{a}-3\vec{c}|$.

666 Даны точки $M(-4;\ 7;\ 0)$ и $N(0;\ -1;\ 2)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка MN.

667 Даны точки $A\left(\frac{3}{2};\ 1;\ -2\right)$, $B(2;\ 2;\ -3)$ и $C(2;\ 0;\ -1)$. Найдите: а) периметр треугольника ABC; б) медианы треугольника ABC.

668 Определите вид треугольника ABC, если: а) $A(9; 3; -5)$, $B(2; 10; -5)$, $C(2;\ 3;\ 2)$; б) $A(3;\ 7;\ -4)$, $B(5;\ -3;\ 2)$, $C(1;\ 3;\ -10)$; в) $A(5;\ -5;\ -1)$, $B(5;\ -3;\ -1)$, $C(4;\ -3;\ 0)$; г) $A(-5;\ 2;\ 0)$, $B(-4;\ 3;\ 0)$, $C(-5;\ 2;\ -2)$.

653 Даны векторы $\overrightarrow{OA}\{3;\ 2;\ 1\}$, $\overrightarrow{OB}\{1;\ -3;\ 5\}$ и $\overrightarrow{OC}\left\{-\frac{1}{3};\ 0{,}75;\ -2\frac{3}{4}\right\}$. Запишите координаты точек A, B и C, если точка O — начало координат.

654 Даны точки $A(2;\ -3;\ 0)$, $B(7;\ -12;\ 18)$ и $C(-8;\ 0;\ 5)$. Запишите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, если точка O — начало координат.

655 Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(2;\ -1;\ 4)$; б) $A(-2;\ 6;\ -2)$, $B(3;\ -1;\ 0)$; в) $A\left(1;\ \frac{5}{6};\ \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right)$.

656 Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(1;\ 6;\ 2)$, $B(2;\ 3;\ -1)$, $C(-3;\ 4;\ 5)$. Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

657 Даны точки $A(3;\ -1;\ 5)$, $B(2;\ 3;\ -4)$, $C(7;\ 0;\ -1)$ и $D(8;\ -4;\ 8)$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны. Равны ли векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$?

Контрольные вопросы

1. Назовите оси координат и координатные векторы.
2. Координаты суммы векторов равны....
3. Как найти координаты вектора?
4. Формула для вычисления длины вектора
5. Как найти координаты середины отрезка?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Скалярное произведение векторов

Цели практического занятия

1. Ввести понятие угла между векторами и скалярного произведения векторов, рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах.
2. Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.
3. Рассмотреть основные свойства скалярного произведения.
4. Сформировать умения вычислять скалярное произведение векторов и находить угол между векторами.
5. Показать, как используется скалярное произведение векторов при решении задач на вычисление углов между двумя прямыми, а также между прямой и плоскостью.

Методический материал

1. Определение скадярного произведения.
2. Свойства скалярного произведения.
3. Скалярное произведение в координатах.
4. Угол между векторами.

Угол между векторами

Если векторы не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB.

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Rightarrow \alpha = 180^0$ $\alpha = 90^0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Rightarrow \alpha = 0$

Определение: Два вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Скалярное произведение векторов:

Определение: Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Запишем формулу:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| cos\alpha$

Доказательство утверждений:

Утверждение1. Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Утверждение2. Скалярный квадрат вектора $(\vec{a} \cdot \vec{a})$ равен квадрату его длины. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Формула скалярного произведения двух векторов $\vec{a}\{x_1; y_1, z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2, z_2\}$.

Через их координаты $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Угол между векторами.

Косинус угла между векторами пространства $\bar{v}(v_1; v_2; v_3), \bar{w}(w_1; w_2; w_3)$, заданными в ортонормированном базисе $(\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$, **выражается формулой**:

$$\cos\angle(\bar{v}; \bar{w}) = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$$

Сформулируем основные свойства скалярного произведения векторов.

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

1) $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{o}$.

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон).

4) $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b}$ (сочетательный закон).

Вычисление углов между прямыми и плоскостями.

Угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов**.**

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$

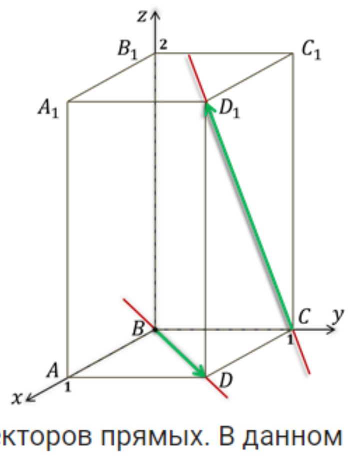
Пример 1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 -$ прямоугольный параллелепипед, где $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$. **Найти** $\angle(BD; CD_1)$ и $\angle(AC; AC_1)$.

Решение: ранее в таких случаях мы пытались по рисунку находить величины углов.

Но теперь мы владеем формулой косинуса угла между прямыми.

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$



Только для этого необходимо знать координаты направляющих векторов прямых. В данном случае, для прямой BD направляющим может является вектор BD , а для прямой
CD - CD вектор (рис. 15)

Для удобства изобразим прямоугольную систему координат так, чтобы точка B совпадала с точкой начала координат. Взяв длину рёбер AB и BC за единичные отрезки, можно утверждать, что длина отрезка BB равна 2.

Тогда не трудно определить координаты точек B, D, C и D_1.

Точка B(0;0;0). Точка D(1;1;0). Точка C(0;1;0) . А точка D (1;1;2).

Теперь не трудно найти координаты векторовBD и CD как разности соответствующих координат конца и начала вектора.

Получаем, что вектор BD {1-0;1-0;0-0}. А вектор

CD {1-0;1-1;2-0}.

Теперь можем воспользоваться формулой косинуса угла между прямыми. Подставим координаты направляющих векторов.

Рис. 15

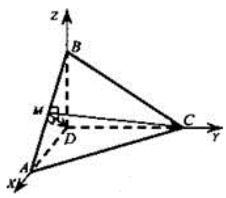
$$cos\angle(BD;CD_1) = \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$

Пример 2.

Дано: *DABC* – пирамида; *DA* ⊥ *DB* ⊥ *DC*; *DA* = *DB* = *DC* = *a*.

Найдите: косинус угла между прямыми *DC* и *CM* (CM – высота треугольника ABC), поставьте ему в соответствие верный вариант ответа из предложенных ниже:



$\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{6}}$

Решение:

Треугольник ABC правильный, поэтому тоска M является серединой стороны AB.

Введем систему координат как показано на рисунке.

Найдем координаты векторов $\overline{DC}$ и $\overline{CM}$

$\overline{DC}\{0;a;0\}$

$\overline{CM}\left\{\frac{a}{2};\ -a;\ \frac{a}{2}\right\}$

Применив формулу косинуса угла между векторами, получим $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Практическая часть

1. Выучите определения и правила.
2. Просмотрите материалы по ссылке:

https://resh.edu.ru/subject/lesson/5723/main/149171/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке:

https://resh.edu.ru/subject/lesson/5723/train/149174/

Задачи

682 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$; б) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$; г) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{AD_1}$; ж) $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; з) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$.

683 Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен φ. Найдите углы $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{DC}}$, $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{CD}}$, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC}}$.

684 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a, точка O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{C_1A_1}$; в) $\overrightarrow{D_1B}$ и $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$; д) $\overrightarrow{A_1O_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$; е) $\overrightarrow{D_1O_1}$ и $\overrightarrow{B_1O_1}$; ж) $\overrightarrow{BO_1}$ и $\overrightarrow{C_1B}$.

685 Даны векторы $\vec{a}\{1;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\{-1;\ 1;\ 1\}$ и $\vec{c}\{5;\ 6;\ 2\}$. Вычислите $\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{b}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{a}$, $\sqrt{\vec{b}\vec{b}}$.

686 Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{j}-5\vec{k}$. Вычислите: а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\vec{a}\vec{i}$; в) $\vec{b}\vec{j}$; г) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{k}$; д) $(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{k}+\vec{i}-2\vec{j})$.

687 Даны векторы $\vec{a}\{3;\ -1;\ 1\}$, $\vec{b}\{-5;\ 1;\ 0\}$ и $\vec{c}\{-1;\ -2;\ 1\}$. Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

688 Дан вектор $\vec{a}\{3;\ -5;\ 0\}$. Докажите, что: а) $\widehat{\vec{a}\vec{i}}<90°$; б) $\widehat{\vec{a}\vec{j}}>90°$; в) $\widehat{\vec{a}\vec{k}}=90°$.

689 Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 2;\ 3\}$ и $\vec{b}\{5;\ x;\ -1\}$. При каком значении x выполняется условие: а) $\vec{a}\vec{b}=3$; б) $\vec{a}\vec{b}=-1$; в) $\vec{a}\perp\vec{b}$?

690 Даны векторы $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$. При каком значении m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

691 Даны точки $A(0;\ 1;\ 2)$, $B(\sqrt{2};\ 1;\ 2)$, $C(\sqrt{2};\ 2;\ 1)$ и $D(0;\ 2;\ 1)$. Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

692 Вычислите угол между векторами: а) $\vec{a}\{2;\ -2;\ 0\}$ и $\vec{b}\{3;\ 0;\ -3\}$; б) $\vec{a}\{\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 2\}$ и $\vec{b}\{-3;\ -3;\ 0\}$; в) $\vec{a}\{0;\ 5;\ 0\}$ и $\vec{b}\{0;\ -\sqrt{3};\ 1\}$; г) $\vec{a}\{-2{,}5;\ 2{,}5;\ 0\}$ и $\vec{b}\{-5;\ 5;\ 5\sqrt{2}\}$; д) $\vec{a}\{-\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ -2\}$ и $\vec{b}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ -1\right\}$.

693 Вычислите углы между вектором $\vec{a}\{2;\ 1;\ 2\}$ и координатными векторами.

694 Даны точки $A(1;\ 3;\ 0)$, $B(2;\ 3;\ -1)$ и $C(1;\ 2;\ -1)$. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

695 Найдите углы, периметр и площадь треугольника, вершинами которого являются точки $A(1;\ -1;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 1)$ и $C(-1;\ 1;\ 3)$.

696 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите косинус угла между векторами: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{DB_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AC_1}$.

697 Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 1$, $BC = CC_1 = 2$. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$.

698 Известно, что $\widehat{\vec{a}\vec{c}} = \widehat{\vec{b}\vec{c}} = 60°$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$. Вычислите $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}$.

699 Докажите справедливость равенства $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d} + \vec{c}\vec{d}$.

Решение

Запишем сумму трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в виде $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. Пользуясь распределительным законом скалярного произведения векторов, получаем $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d} = ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c})\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b})\vec{d} + \vec{c}\vec{d} = (\vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d}) + \vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d} + \vec{c}\vec{d}$.

700 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны к вектору $\vec{c}$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 120°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Вычислите: а) скалярные произведения $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(2\vec{b})$ и $(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{c})$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$ и $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение скалярного произведения.
2. Перечислите свойства скалярного произведения.
3. Скалярное произведение в координатах.
4. Как найти угол между векторами?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Многогранники. Призма.

Цели практического занятия

1. Сформировать понятия многогранника и его элементов, выпуклого и невыпуклого многогранника, призмы и её элементов, прямой, наклонной и правильной призмы, площади поверхности призмы.
2. Рассмотреть решения геометрических задач из учебника по теме «Многогранники».
3. Сформировать умение применять математические знания к решению практических задач.
4. Развить познавательный интерес через исследовательскую деятельность на основе умения делать обобщения по данным, полученным в результате исследования.
5. Сформировать умения применять приёмы сравнения, переносить знания в новую ситуацию.

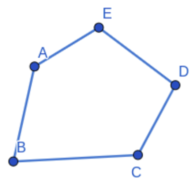
Методический материал

1. Определение многогранника и его элементов.
2. Виды многогранников.
3. Многогранник как модель реального объекта.
4. Теорема Эйлера для многогранников.
5. Понятие призмы и виды призм.
6. Элементы призмы: вершины, ребра, грани.
7. Понятие площади боковой поверхности и площади полной поверхности призмы, формулы для вычисления.
8. Призма как модель реальных объектов.
9. Пространственная теорема Пифагора.

Понятие многогранника

К определению понятия многогранника существует два подхода. Проведем аналогию с понятием многоугольника. Напомним, что в планиметрии под многоугольником мы понимали замкнутую линию без самопересечений, составленную из отрезков (рис. 1а). Также многоугольник можно рассматривать как часть плоскости, ограниченную этой линией, включая ее саму (рис. 1б). При изучении тел в пространстве мы будем пользоваться вторым толкованием понятия многоугольник. Так, любой многоугольник в пространстве есть плоская поверхность.

А)



Б)

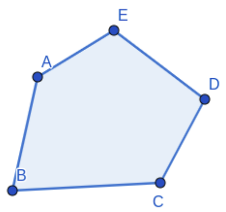


Рисунок 1 – разные подходы к определению многоугольника

По аналогии с первым толкованием понятия многоугольника рассматривается следующее толкование понятия многогранника. Многогранник - поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело. В данной трактовке многогранник можно называть еще многогранной поверхностью.

Вторая трактовка понятия определяет многогранник как геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников.

В дальнейшем, мы будем использовать вторую трактовку понятия многогранника.

Примеры многогранников

Уже известные вам тетраэдр и параллелепипед являются многогранниками. Потому что они являются геометрическими телами, ограниченные конечным числом плоских многоугольников. Еще один пример многогранника — октаэдр (рис. 2)

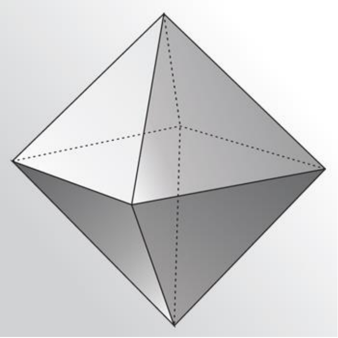


Рисунок 2 – изображение октаэдра

Элементы многогранника

Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются его **гранями.** Так, у тетраэдра и октаэдра гранями являются треугольники. У тетраэдра 4 грани, отсюда и его название от греч. τετρά-εδρον — четырёхгранник. У октаэдра 8 граней, а от греческого οκτάεδρον от οκτώ «восемь» + έδρα «основание».

Стороны граней называются **ребрами**, а концы ребер — вершинами многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника.

Виды многогранников

Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. В остальных случаях многогранник называется **невыпуклым** (рис.3)**.**

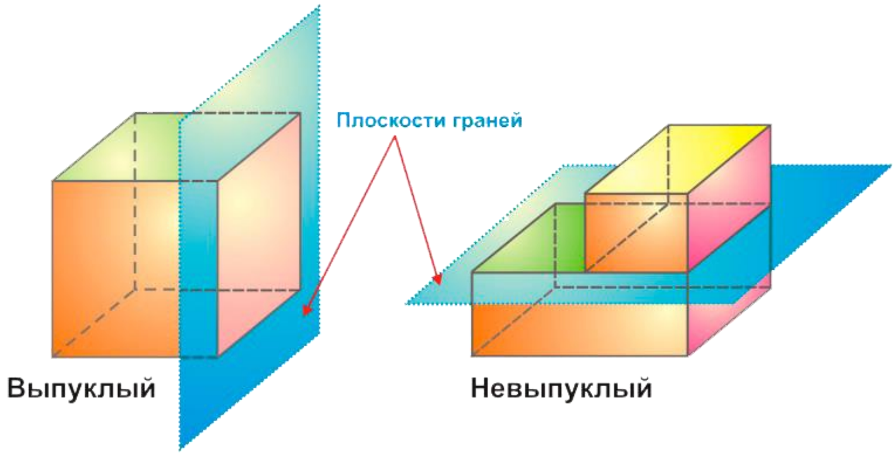


Рисунок 3 – Виды многогранников

Сумма плоских углов при вершине выпуклого многогранника

Утверждение. В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360^0.

Пояснить данное утверждение поможет рисунок 4. “Разрежем” многогранник вдоль его ребер и все его грани с общей вершиной расположим так, чтобы они оказались в одной плоскости. Видим, что сумма всех плоских углов действительно меньше 360^0.

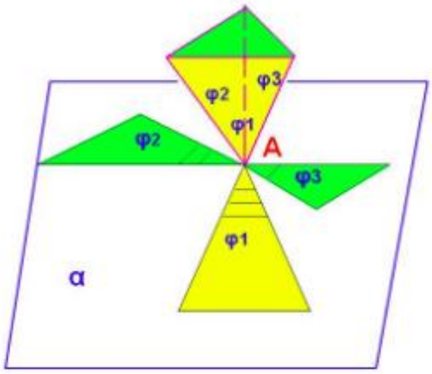


Рисунок 4 – сумма плоских углов пи вершине многогранника

Теорема Эйлера. Пусть В — число вершин выпуклого многогранника, Р — число его ребер, а Г — число его граней. Тогда верно равенство В – Р+Г= 2.

Теорема Эйлера играет огромную роль в математике. С ее помощью было доказано огромное количество теорем. Находясь в центре постоянного внимания со стороны математиков, теорема Эйлера получила далеко идущие обобщения. Более того, эта теорема открыла новую главу в математике, которая называется топологией.

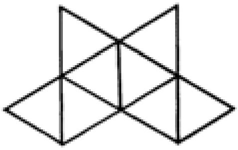
Задание 1. Какие из перечисленных объектов НЕ могут быть элементами многогранника? Укажите номера в порядке возрастания.

1) отрезок
2) плоскость
3) точка
4) луч
5) многоугольник
6) многогранник
7) прямая
8) трапеция

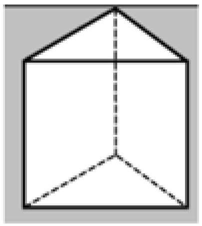
Решение: Элементы многогранника, которые мы выделили: ребра, грани, вершины и диагонали. Ребро и диагональ многогранника – это отрезок. Грань многогранника – многоугольник, или иначе ограниченная часть плоскости. Вершины представляют собой точки. Таким образом, элементами многогранника не могут быть плоскость, луч, многогранник, прямая.

Ответ: 2467

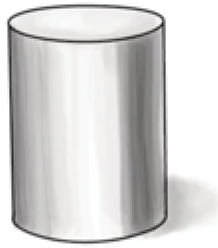
Задание 2. Сопоставьте геометрическим фигурам их вид



1)



2)



3)

А) плоская фигура

Б) пространственная фигура

В) Многогранник

Решение

Вспомним, что изобразить пространственную фигуру можно разными способами. Например, с помощью теней или изображением невидимых линий пунктиром. Так, среди всех изображений плоской фигурой является фигура под номером 1.

Многогранник – геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников. Только на изображении 2 фигура ограничена многоугольниками. Таким образом, получаем следующий ответ: 1-А, 2-В, 3-Б

Определение призмы. Элементы призмы.

Рассмотрим два равных многоугольника A1A2...An и B1B2...Bn, расположенных в параллельных плоскостях α и β соответственно так, что отрезки A1B1, A2B2...AnBn, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны (рис. 1).

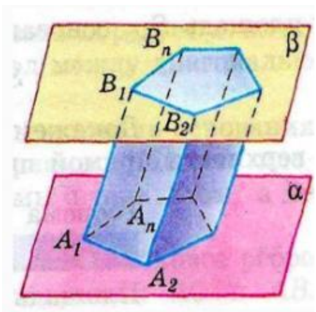


Рисунок 1 – Призма

Заметим, что каждый из **n четырехугольников** (A1A2B1B2, ...AnA1B1Bn) является **параллелограммом.** Убедимся в этом на примере четырехугольника A1A2B1B2. A1A2 и B1B2 параллельны по свойству параллельных плоскостей, пересеченных третьей плоскостью. A1B1 и A2B2 по условию. Таким образом, в четырехугольнике A1A2B1B2 противоположные стороны попарно параллельны, значит этот четырехугольник — параллелограмм по определению.

Дадим определение призмы. **Призма** – многогранник, составленный из равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов.

При этом равные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях, называются **основаниями призмы**, а параллелограммы – **боковыми гранями призмы.** Общие стороны боковых граней будем называть **боковыми ребрами призмы.**

На рисунке 1 основаниями призмы являются многоугольники A1A2...An и B1B2...Bn. Боковые грани – параллелограммы A1A2B1B2, …, AnA1B1Bn, а боковые ребра - отрезки A1B1, A2B2, …, AnBn.

Отметим, что все боковые ребра призмы равны и параллельны (как противоположные стороны параллелограммов).

Призму с основаниями A1A2...An и B1B2...Bn обозначают A1A2...AnB1B2...Bn и называют **n-угольной призмой.**

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой призмы. Обратите внимание, что все высоты призмы равны между собой, так как основания расположены на параллельных плоскостях. Также высота призмы может лежать вне призмы (рис. 2).

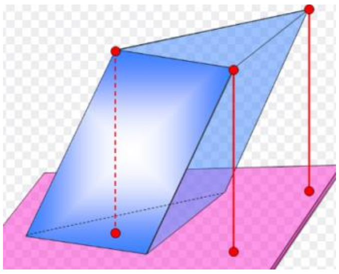


Рисунок 2 – Наклонная призма

Виды призм

Если боковые ребра призмы перпендикулярны основаниям, то призма называется **прямой**. В противном случае, призма называется **наклонной**.

Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

На рисунке 3 приведены примеры прямых призм

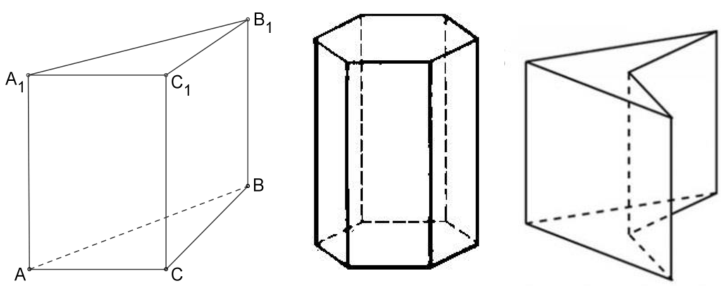


Рисунок 3 – Виды призм.

Прямая призма называется **правильной**, если ее основание – правильный многоугольник. В правильной призме все боковые грани – равные прямоугольники.

Иногда четырехугольную призму, грани которой параллелограммы называют параллелепипедом. Известный вам правильный параллелепипед – это куб.

Площадь полной поверхности призмы. Площадь боковой поверхности призмы.

Площадью полной поверхности призмы (Sполн) называется сумма площадей всех ее граней, а **площадью боковой поверхности (**Sбок**)** призмы – сумма площадей ее боковых граней.

Таким образом, верно следующее равенство: Sполн= Sбок+2Sосн, то есть площадь полной поверхности есть сумма площади боковой поверхности и удвоенной площади основания.

Чему равна площадь боковой поверхности прямой призмы?

Теорема. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Доказательство

Боковые грани прямой призмы – прямоугольники, основания которых – стороны основания призмы, а высоты равны высоте призмы – h. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей боковых граней, то есть прямоугольников. Площадь каждого прямоугольника есть произведение высоты h и стороны основания. Просуммируем эти площади и вынесем множитель h за скобки. В скобках получим сумму всех сторон основания, то есть периметр основания P. Таким образом Sбок=Pоснh.

Пространственная теорема Пифагора

Прямой параллелепипед, основание которого – прямоугольник называется **прямоугольным.**

Теорема. Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, исходящих из одной вершины.

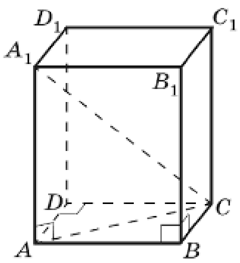


Рисунок 4 – Прямоугольный параллелепипед

Доказательство

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед ABCDA1B1C1D1 и найдем квадрат длины его диагонали A1C.

Для этого рассмотрим треугольник A1AC:

Ребро AA1 перпендикулярно плоскости основания (ABC) (т.к. параллелепипед прямой), значит AA1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости основания, в том числе AC. Таким образом, ΔA1AC – прямоугольный.

По теореме Пифагора получаем: A1C2=AA12+AC2 (1).

Выразим теперь AC. По условию в основании лежит прямоугольник, значит ΔABC – прямоугольный. По тереме Пифагора получаем: AC2=BC2+AB2.

Подставив результат в (1), получим: A1C2=AA12+BC2+AB2.

Так как в основании прямоугольник, то BC=AD.

Таким образом, A1C2=AA12+AD2+AB2.

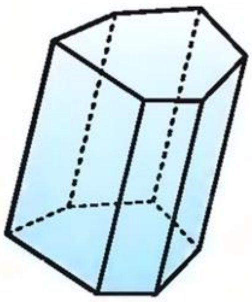
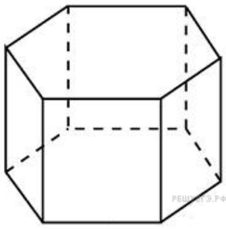
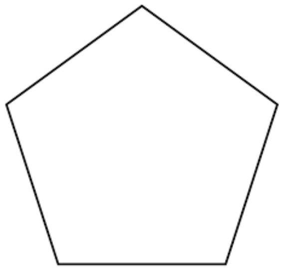
Что и требовалось доказать

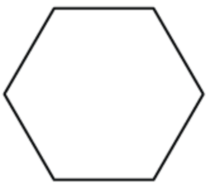
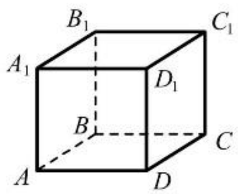
Доказанная теорема является аналогом теоремы Пифагора (для прямоугольного треугольника), поэтому ее иногда называют **пространственной теоремой Пифагора.**

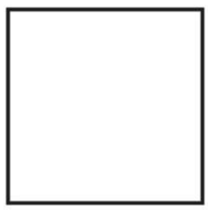
Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Задание 1.

Найдите для каждой картинки пару


1)

2)

3)


4)


5)

6)

Решение

Все изображения можно разделить на две группы: призмы и многоугольники. Вспомним, что основанием призмы является многоугольник. Теперь необходимо посчитать количество вершин многоугольников в основаниях призм и сопоставить их с нужным изображением. Таким образом, получаем следующий ответ: 1 и 3, 2 и 4, 5 и 6.

Задание 2

Какие из перечисленных объектов могут быть элементами призмы?

1) параллельные плоскости

2) отрезок

3) точка

4) четырехугольник

Решение:

Вспомним сначала, какие элементы есть у призмы. Это ребра, грани, вершины, основания, высота, диагональ.

Ребра, высота и диагональ призмы представляют собой отрезок. Грани и основания – это многоугольники, то есть части плоскостей. Вершины – точки. Таким образом, подходят варианты 2, 3,4.

Ответ: 2,3,4

Практическая часть

1. Выучите определения и правила.
2. Просмотрите материалы по ссылке:

https://resh.edu.ru/subject/lesson/6018/main/221554/

https://resh.edu.ru/subject/lesson/5443/main/21274/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке:

https://resh.edu.ru/subject/lesson/6018/train/221559/
https://resh.edu.ru/subject/lesson/5443/train/21278/

Задачи

218 Докажите, что: а) у прямой призмы все боковые грани — прямоугольники; б) у правильной призмы все боковые грани — равные прямоугольники.

219 В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

220 Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда равна 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

221 Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.

222 Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 9 см и высотой 8 см. Найдите двугранные углы при боковых рёбрах призмы.

223 Через два противолежащих ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро куба и его диагональ.

224 Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону нижнего основания и противолежащую сторону верхнего основания, если диагональ основания равна $4\sqrt{2}$ см.

225 Диагональ правильной четырёхугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол в 30°. Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

226 В правильной четырёхугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна 2 см, а её высота равна 4 см.

227 Основание призмы — правильный треугольник ABC. Боковое ребро AA_1 образует равные углы со сторонами основания AC и AB. Докажите, что: а) $BC \perp AA_1$; б) CC_1B_1B — прямоугольник.

228 Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = AB = 13$ см, $BC = 10$ см, а боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол в 45°. Проекцией вершины A_1 является точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите площадь грани CC_1B_1B.

229 В правильной n-угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площади боковой и полной поверхности призмы, если: а) $n = 3$, $a = 10$ см, $h = 15$ см; б) $n = 4$, $a = 12$ дм, $h = 8$ дм; в) $n = 6$, $a = 23$ см, $h = 5$ дм; г) $n = 5$, $a = 0{,}4$ м, $h = 10$ см.

230 Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

231 Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60°. Меньшая из площадей диагональных сечений[1] равна 130 см^2. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

Контрольные вопросы

1. Определение многогранника и его элементов.
2. Какие бывают виды многогранников?
3. Приведите примеры многогранников как моделей реального объекта.
4. Сформулируйте теорем Эйлеру для многогранников.
5. Какие бывают виды призм?
6. Назовите элементы призмы.
7. Как вычислить площадь боковой поверхности и площадь полной поверхности призмы?
8. Сформулируйте пространственную теорему Пифагора.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Пирамида.

Цели практического занятия

1. Закрепить понятия «пирамида», виды и её элементы, площадь боковой и полной поверхности пирамиды.
2. Развить логическое мышление, внимание, память, умение выбирать наиболее эффективный способ решения задач в зависимости от условий, кратко и чётко формулировать свои мысли, обобщать изученный материал, работать в группах.

Методический материал

1. Понятие пирамиды.
2. Виды пирамид.
3. Элементы пирамиды: вершина, ребра, грани, основание.
4. Площадь боковой поверхности и полной поверхности пирамиды.

Определение пирамиды

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника (рис.1). Соединив точку P с вершинами многоугольника, получим n треугольников: PA_1A_2, PA_2A_3,..., PA_nA_1.

Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2...A_n$ и n треугольников, называется **пирамидой.** Многоугольник $A_1A_2...A_n$ называется **основанием**, а треугольники PA_1A_2, PA_2A_3,..., PA_nA_1 – **боковые грани** пирамиды, отрезки PA_1, PA_2,..., PA_n – **боковые ребра** пирамиды, точка **P** – вершина пирамиды. Пирамиду с основанием $A_1A_2...A_n$ и вершиной P называют n-угольной пирамидой и обозначают $PA_1A_2...A_n$.

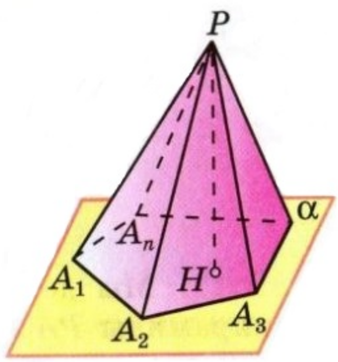


Рисунок 1 - пирамида

Высота пирамиды

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды. На рисунке 1 PH является высотой. Обратите внимание, что высота может лежать и вне пирамиды (рис. 3) или быть одним из боковых ребер (рис. 4).

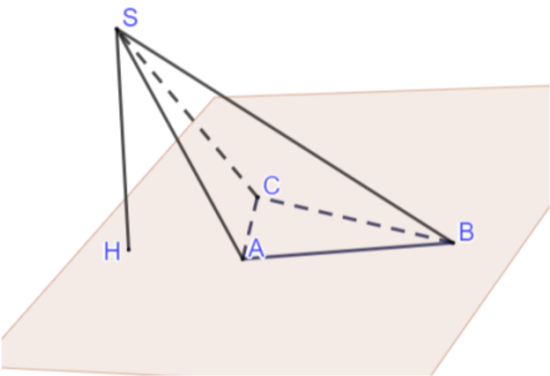


Рисунок 3 – высота вне пирамиды

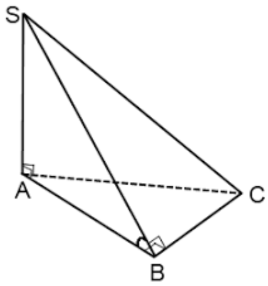


Рисунок 4 – Высота пирамиды - боковое ребро

Правильная пирамида

Будем называть пирамиду правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой. Напомним, что центром правильного многоугольника называется центр вписанной в него (или описанной около него) окружности (рис.5).

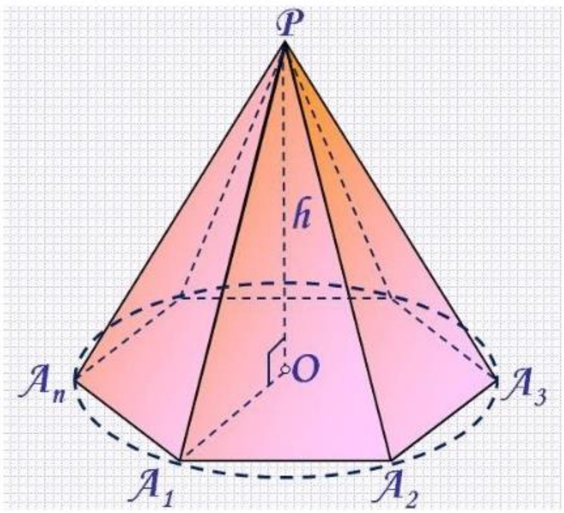


Рисунок 5 – Правильная пирамида

Правильная пирамида обладает несколькими хорошими свойствами. Давайте выясним, какими.

Рассмотрим правильную пирамиду $PA_1A_2...A_n$ (рис. 5).

Пусть O – центр описанной около основания окружности, тогда PO – высота пирамиды, значит PO перпендикулярен любой прямой, лежащей в плоскости основания. Таким образом, высота PO перпендикулярна радиусам A_1O, A_2O,...A_nO.

Образованные высотой и радиусами треугольники являются прямоугольными. Причем, эти треугольники имеют общий катет – PO и равные катеты A_1O, A_2O,...A_nO (равны как радиусы). Значит, треугольники POA_1, POA_2,...POA_n равны по двум катетам, значит равны гипотенузы PA_1, PA_2... PA_n, которые являются боковыми ребрами правильной пирамиды.

Боковые ребра пирамиды равны, значит боковые грани – равнобедренные треугольники. Основания этих треугольников равны друг другу, так как в основании лежит правильный многоугольник. Следовательно, боковые грани равны по третьему признаку равенства треугольников.

Таким образом, верны следующие утверждения:

Все боковые ребра правильной пирамиды равны.
Боковые ребра правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками.

Введем еще одно определение. **Апофемой** называется высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины. На рисунке 5 PE – одна из апофем.

Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу как высоты в равных треугольниках.

Усеченная пирамида

Возьмем произвольную пирамиду $PA_1A_2...A_n$ и проведем секущую плоскость β, параллельную плоскости основания пирамиды α и пересекающую боковые ребра в точках B_1,B_2,...B_n (рис. 6). Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n-угольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ (**нижнее и верхнее основания соответственн**о), расположенные в параллельных плоскостях и n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ... $A_1A_nB_nB_1$ **(боковые грани)**, называется **усеченной пирамидой.**

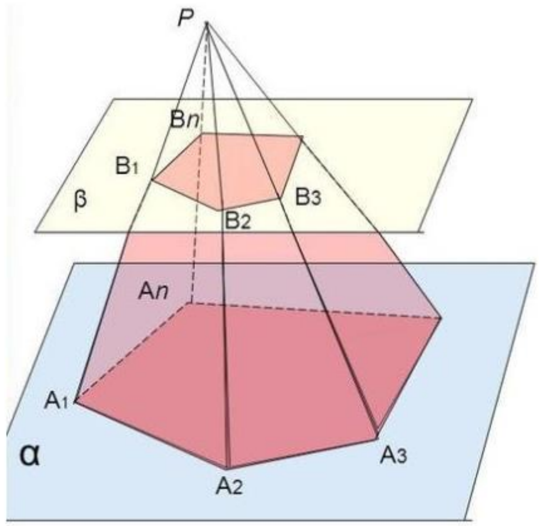


Рисунок 6 – Усеченная пирамида

Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ... A_nB_n называют **боковыми ребрами** усеченной пирамиды.

Усеченную пирамиду с основаниями $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ обозначают следующим образом: $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания называется **высотой усеченной пирамиды.** На рисунке 7 отрезки HH_1 и B1O –высоты усеченной пирамиды.

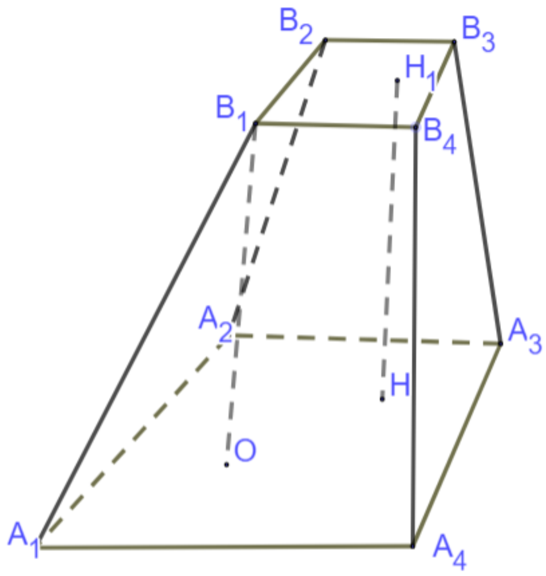


Рисунок 7 – Высота усеченной пирамиды

Площадь поверхности пирамиды

Площадью полной поверхности пирамиды называются сумма площадей всех ее граней, а площадью боковой поверхности пирамиды – сумма площадей ее боковых граней.

Для пирамиды, верно равенство $S_{полн}= S_{бок}+S_{осн}$.

Докажем теорему для площади боковой поверхности правильной пирамиды.

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Для площади боковой поверхности усеченной пирамиды верна следующая теорема

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

Практическая часть

1. Выучите определения и правила.
2. Просмотрите материалы по ссылке:

https://resh.edu.ru/subject/lesson/5866/main/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке:

https://resh.edu.ru/subject/lesson/5866/train/221584/

Задачи

239 Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые рёбра пирамиды, если высота её проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

240 Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

241 Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

242 Основанием пирамиды является квадрат, одно из боковых рёбер перпендикулярно к плоскости основания. Плоскость боковой грани, не проходящей через высоту пирамиды, наклонена к плоскости основания под углом 45°. Наибольшее боковое ребро равно 12 см. Найдите: а) высоту пирамиды; б) площадь боковой поверхности пирамиды.

243 Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник ABC, у которого $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см; ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

244 Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник ABC, у которого гипотенуза AB равна 29 см, а катет AC равен 21 см. Боковое ребро DA перпендикулярно к плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

245 Основанием пирамиды является прямоугольник, диагональ которого равна 8 см. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы в 30° и 45°. Найдите площадь поверхности пирамиды.

246 Высота треугольной пирамиды равна 40 см, а высота каждой боковой грани, проведённая из вершины пирамиды, равна 41 см. а) Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в её основание. б) Найдите площадь основания пирамиды, если его периметр равен 42 см.

247 Двугранные углы при основании пирамиды равны. Докажите, что: а) высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание пирамиды; б) высоты всех боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны; в) площадь боковой поверхности пирамиды равна половине произведения периметра основания на высоту боковой грани, проведённую из вершины пирамиды.

248 Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 12 см, 10 см и 10 см. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

249 В пирамиде все боковые рёбра равны между собой. Докажите, что: а) высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания; б) все боковые рёбра пирамиды составляют равные углы с плоскостью основания.

250 Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом 120°. Боковые рёбра образуют с её высотой, равной 16 см, углы в 45°. Найдите площадь основания пирамиды.

251 Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник с гипотенузой BC. Боковые рёбра пирамиды равны друг другу, а её высота равна 12 см. Найдите боковое ребро пирамиды, если $BC = 10$ см.

252 Основанием пирамиды $DABC$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором стороны AB и AC равны, $BC = 6$ см, высота AH равна 9 см. Известно также, что $DA = DB = DC = 13$ см. Найдите высоту пирамиды.

253 Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 6 см и $4\sqrt{6}$ см и высотой 5 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите её высоту.

254 В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, высота равна H. Найдите: а) боковое ребро пирамиды; б) плоский угол при вершине пирамиды; в) угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды; г) угол между боковой гранью и основанием пирамиды; д) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

255 В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен φ. Найдите высоту этой пирамиды.

256 В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна m, а плоский угол при вершине равен α. Найдите: а) высоту пирамиды; б) боковое ребро пирамиды; в) угол между боковой гранью и плоскостью основания; г) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

257 Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при стороне основания равен 45°. Найдите площадь поверхности пирамиды.

258 Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды образует угол в 60° с плоскостью основания. Найдите площадь поверхности пирамиды, если боковое ребро равно 12 см.

259 В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите боковое ребро пирамиды.

260 В правильной треугольной пирамиде $DABC$ через боковое ребро DC и высоту DO пирамиды проведена плоскость α. Докажите, что: а) ребро AB перпендикулярно к плоскости α; б) перпендикуляр, проведённый из вершины C к апофеме грани ADB, является перпендикуляром к плоскости ADB.

261 Докажите, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра взаимно перпендикулярны.

262 Докажите, что плоскость, проходящая через высоту правильной пирамиды и высоту боковой грани, перпендикулярна к плоскости боковой грани.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте понятие пирамиды.
2. Какие виды пирамид вы знаете?
3. Какие элементы пирамиды вы знаете?
4. Как вычислить площадь боковой поверхности пирамиды?
5. Как вычислить площадь полной поверхности пирамиды?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Тела вращения. Цилиндр.

Цель практического занятия

1. Систематизировать и обобщить знания о цилиндре.
2. Закрепить формулы площади боковой поверхности и площади основания и их применение для нахождения определяющих элементов тела вращения.
3. Повторить и закрепить понятия цилиндра как тела вращения, оси цилиндра, оснований цилиндра, высоты цилиндра, образующей цилиндра, осевого сечения цилиндра.
4. Повторить формулы площадей боковой и полной поверхностей цилиндра и их применение при решении задач.
5. Развивать пространственное воображение и логическое мышление учащихся.
6. Формировать навыки применения ранее полученных знаний в нестандартных ситуациях.
7. Развивать общеучебные умения и навыки (анализ, синтез, сравнение, обобщение) и умение наблюдать.

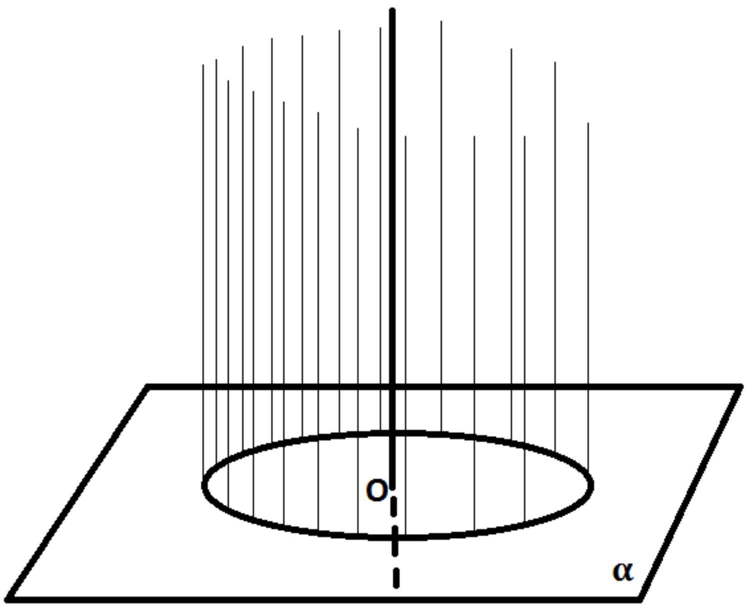
Методический материал

1. Тело вращения.
2. Цилиндрическая поверхность, её образующая; цилиндр, все его элементы и сечения.
3. Площади поверхностей цилиндра.

1. Основные определения

Определение

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная прямыми, проходящими через все точки окружности, перпендикулярными плоскости, в которой лежит эта окружность (см.рис.).



Определение

Сами прямые называют образующими цилиндрической поверхности.

Определение

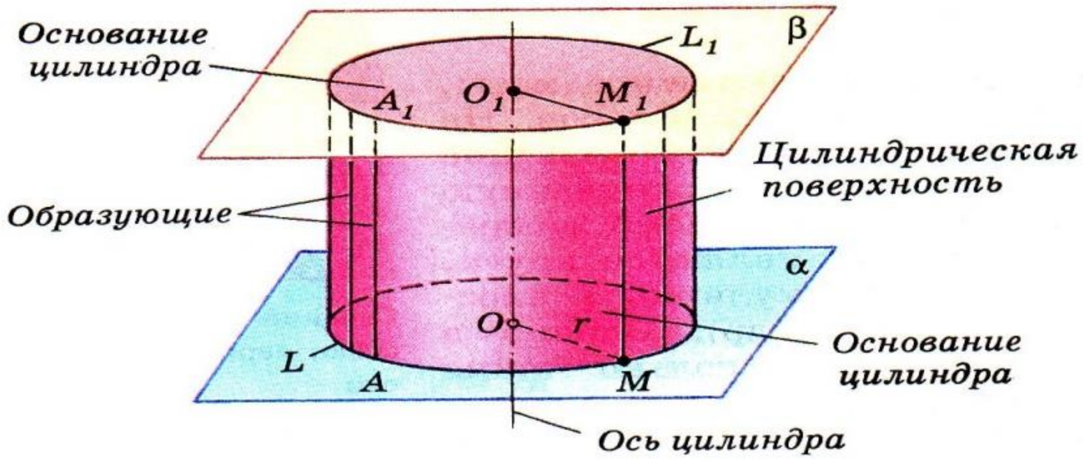
Прямая, проходящая через точку O, перпендикулярно к плоскости, называется осью цилиндрической поверхности.

Так как все образующие и ось перпендикулярны плоскости α, значит они параллельны друг другу (вспомнить теорему «Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны»).

Если построить ещё одну плоскость β, которая будет параллельна плоскости α, то отрезки образующих, заключённые между плоскостями α и β будут параллельны и равны друг другу (вспомнить свойство параллельных плоскостей «отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны»). Точки, являющиеся концами отрезков параллельных прямых и лежащие в плоскости β, дают окружность, равную окружности, лежащей в плоскости α.

Определение

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами (границы которых есть те самые равные окружности в плоскостях α и β) называется цилиндром.



Определение

Круги называются основаниями цилиндра, отрезки образующих, заключённые между основаниями, - образующими цилиндра, а образованная ими часть цилиндрической поверхности – боковой поверхностью цилиндра.

Определение

Ось цилиндрической поверхности называется осью цилиндра.

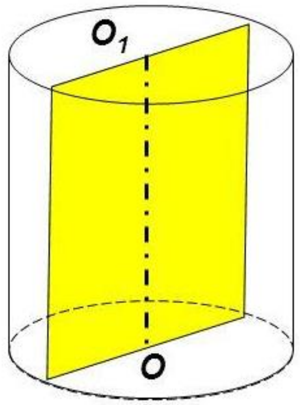
Определение

Длина образующей называется высотой цилиндра (все образующие равны и параллельны), а радиус основания – радиусом цилиндра.

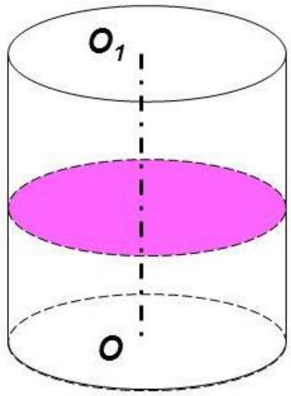
Также цилиндр можно получить вращением прямоугольника вокруг одной из сторон. Тогда эта сторона (вокруг которой происходит вращение) будет совпадать с осью цилиндра, противоположная сторона будет образовывать боковую поверхность, а две оставшиеся стороны образуют верхнее и нижнее основания, одновременно являясь радиусами цилиндра.

2. Сечения цилиндра различными плоскостями

Пусть секущая плоскость проходит через ось цилиндра. Такое сечение называют осевым. Оно представляет собой прямоугольник, две стороны которого – образующие, а две другие – диаметры оснований цилиндра.



Если секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра, то сечение является кругом.



Если секущая плоскость проходит параллельно оси цилиндра, но не содержит саму ось, то сечение является прямоугольником две стороны которого – образующие, а две другие – отрезки, соединяющие эти образующие в верхнем и в нижнем основании (ЗАМЕЧАНИЕ: эти отрезки меньше диаметров оснований цилиндра).

3. Основные формулы

Формула для вычисления площади боковой поверхности цилиндра: $S_{бок}=2\pi RL$.

То есть площадь боковой поверхности равна произведению длины окружности основания цилиндра на его высоту.

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. В виде формулы это можно записать так: $S_{полн}=2\pi R(R+L)$.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

1. Дан цилиндр.

Выберите значение площади его боковой поверхности

1) 60π

2) 192π

3) 120π

4) 36π

Решение:

Площадь боковой поверхности вычисляется по формуле: $S=2\pi RL$.

$R=6$, $L=10$

Подставим: $S=2\pi\cdot 6\cdot 10=120\pi$.

Ответ: 3) 120π

2. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу 120^0. Образующая цилиндра равна $6\sqrt{3}$, расстояние от оси до секущей плоскости равно 1. Найдите площадь сечения.

Решение:

Сделаем чертеж:

По условию задачи $\angle AOB=120^0$, $BC=6\sqrt{3}$.

Расстояние от оси до секущей плоскости - отрезок $OH=1$.

Найдем сторону AB сечения.

ΔOHB - прямоугольный.

В ΔOHB: $OH=1$, $\angle HOB=60^0$.

$HB=OH\cdot tg60^0=1\cdot\sqrt{3}$.

$S_{сеч}=6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=18$

Ответ: 18

3. Высота цилиндра на 6 больше его радиуса, площадь полной поверхности равна 144π. Найдите его образующую.

Решение:

$S_{полн} = 2\pi R(R+L)$

По условию задачи L=R+6.

144π=2πR(R+R+6).

Получили квадратное уравнение относительно радиуса:

$R^2+6R-72=0$

R=-12 или R=6. Так как длина радиуса не может быть отрицательной, получаем значение: R=6. Тогда образующая цилиндра равна 12.

Ответ: 12.

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.

2. Просмотрите материал по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6300/main/22494/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/6300/train/22498/

Задачи.

320 Докажите, что осевое сечение цилиндра является прямоугольником, две противоположные стороны которого — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра. Найдите диагональ осевого сечения, если радиус цилиндра равен 1,5 м, а высота равна 4 м.

321 Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен 60°. Найдите: а) высоту цилиндра; б) радиус цилиндра; в) площадь основания цилиндра.

322 Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найдите: а) высоту цилиндра; б) площадь основания цилиндра.

323 Осевые сечения двух цилиндров равны. Верно ли, что высоты двух цилиндров равны, если равны их осевые сечения?

324 Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 м^2, а площадь основания равна 5 м^2. Найдите высоту цилиндра.

325 Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как $\sqrt{3}\pi : 4$. Найдите: а) угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания; б) угол между диагоналями осевого сечения.

326 Концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен r, его высота — h, а расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно d. Найдите: а) h, если $r=10$ дм, $d=8$ дм, $AB=13$ дм; б) d, если $h=6$ см, $r=5$ см, $AB=10$ см.

327 Докажите, что если секущая плоскость параллельна оси цилиндра и расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра меньше его радиуса, то сечение цилиндра представляет собой прямоугольник, две противоположные стороны которого — образующие цилиндра.

328 Высота цилиндра равна 8 см, радиус равен 5 см. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра равно 3 см.

329 Высота цилиндра равна 12 см, а радиус основания равен 10 см. Цилиндр пересечён плоскостью, параллельной его оси, так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости.

330 Высота цилиндра равна 10 дм. Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удалённой на 9 дм от неё, равна 240 дм^2. Найдите радиус цилиндра.

331 Через образующую AA_1 цилиндра проведены две секущие плоскости, одна из которых проходит через ось цилиндра. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями, если угол между ними равен φ.

332 Высота цилиндра равна h, а площадь осевого сечения равна S. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между осью цилиндра и плоскостью сечения равно d.

333 Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в $120°$. Найдите площадь сечения, если высота цилиндра равна h, а расстояние между осью цилиндра и секущей плоскостью равно d.

334 Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в $60°$. Образующая цилиндра равна $10\sqrt{3}$ см, расстояние от оси до секущей плоскости равно 2 см. Найдите площадь сечения.

335 Через образующую цилиндра проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Площадь каждого из полученных сечений равна S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

336 Диаметр основания цилиндра равен 1 м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

337 Площадь боковой поверхности цилиндра равна S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

338 Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с диаметром основания 1,5 м и высотой 3 м, если на один квадратный метр расходуется 200 г краски?

339 Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π см^2. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

340 Сколько квадратных метров листовой жести пойдёт на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 20 см, если на швы необходимо добавить 2,5% площади её боковой поверхности?

341 Угол между образующей цилиндра и диагональю осевого сечения равен φ, площадь основания цилиндра равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

342 Угол между диагоналями развёртки боковой поверхности цилиндра равен φ, диагональ равна d. Найдите площади боковой и полной поверхностей цилиндра.

343 Из квадрата, диагональ которого равна d, свёрнута боковая поверхность цилиндра. Найдите площадь основания этого цилиндра.

344 Цилиндр получен вращением квадрата со стороной a вокруг одной из его сторон. Найдите площадь:
а) осевого сечения цилиндра; б) боковой поверхности цилиндра; в) полной поверхности цилиндра.

345 Один цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB, а другой цилиндр — вращением этого же прямоугольника вокруг прямой BC. а) Докажите, что площади боковых поверхностей этих цилиндров равны. б) Найдите отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров, если $AB = a$, $BC = b$.

Контрольные вопросы;

1. Что такое тело вращения?
2. Что назывется цилиндрической поверхностью?
3. Какие элементы цилиндра вы знаете?
4. Площадь поверхностей цилиндра.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Конус.

Цель практического занятия

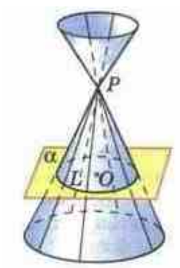
1. Сформировать понятия конической поверхности, сечений конуса и его элементов.
2. Сформировать навыки решения задач на нахождение элементов конуса, использования формул вычисления боковой и полной поверхности конуса, решения прикладных задач.
3. Показать связь теории с практикой.
4. Способствовать развитию логического мышления учащихся и расширению кругозора.
5. Развивать пространственное воображение учащихся, умение применять формулы планиметрии при решении стереометрических задач.
6. Развивать и совершенствовать умения применять накопленные знания в изменённой ситуации.
7. Развивать грамотную математическую речь, навыки самоконтроля.

Методический материал

1. Коническая поверхность, образующая конической поверхности, её вершина, ось.
2. Конус, основание конуса, вершина конуса, образующие конуса, ось конуса, высота конуса.
3. Боковая поверхность конуса, полная поверхность конуса.
4. Сечение конуса и его виды.
5. Усечённый конус и его элементы.
6. Площади поверхностей усеченного конуса.

1. Основные определения

В плоскости α построю окружность L с центром в точке O. Проведу прямую OP перпендикулярно плоскости α. Соединю точку P со всеми точками окружности L прямыми линиями. Поверхность, состоящую из этих прямых, называют **конической поверхностью,** сами прямые называют **образующими конической поверхности,** точку P называют **вершиной,** а прямую OP – **осью конической поверхности.**



Ввожу новые понятия конуса, основания конуса, вершины конуса, образующих конуса, боковой поверхности конуса, оси конуса и высоты конуса.

Определение

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L, называется **конусом**.

Определение

Круг называют **основанием конуса**.

Определение

Вершину конической поверхности называют **вершиной конуса**.

Определение

Отрезки образующих, заключённые между вершиной и основанием называют **образующими конуса,** а образованная ими часть конической поверхности – **боковой поверхностью конуса.**

Определение

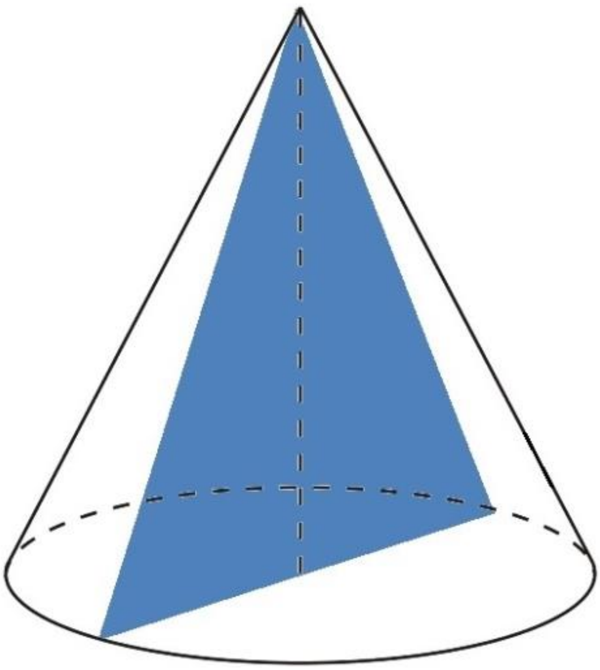
Ось конической поверхности называют и **осью конуса**, а её отрезок, заключённый между вершиной и основанием называют **высотой конуса.**

Отмечу, что все образующие конуса равны друг другу. Это легко доказать, если рассмотреть различные прямоугольные треугольники, в которых один катет – это высота конуса, а вторыми катетами являются радиусы основания конуса. Тогда образующие, являясь гипотенузами этих прямоугольных треугольников с равными катетами, также будут равны.

Конус можно получить ещё одним способом - вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов. Тогда этот катет (вокруг которого происходит вращение) будет совпадать с осью конуса и будет его высотой, гипотенуза станет образующей и будет образовывать боковую поверхность, а оставшийся катет образует основание, одновременно являясь его радиусом.

2. Сечения конуса различными плоскостями

1. Пусть секущая плоскость проходит через ось конуса. Такое сечение называют осевым. Оно представляет собой равнобедренный треугольник, боковые стороны которого – образующие конуса, а его основанием является диаметр основания конуса.



1. Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, то сечение представляет собой круг с центром, расположенном на оси.

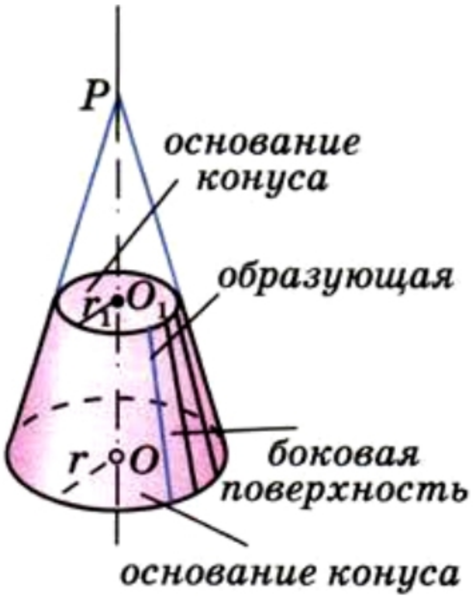
3. Основные формулы

Формула для вычисления площади боковой поверхности конуса: $S_{бок}=\pi RL$.

Площадь полной поверхности конуса: $S_{полн}=\pi R(R+L)$.

4. Усеченный конус

Если взять произвольный конус и провести секущую плоскость перпендикулярно его оси, то исходный конус разделится на две части. Верхняя часть представляет собой конус меньших размеров, а оставшуюся часть называют **усечённым конусом.**



Определение

Основание исходного конуса и круг, получившийся в сечении, называют **основаниями усечённого конуса.**

Определение

Отрезок, соединяющий центры оснований, называют **высотой усечённого конуса.**

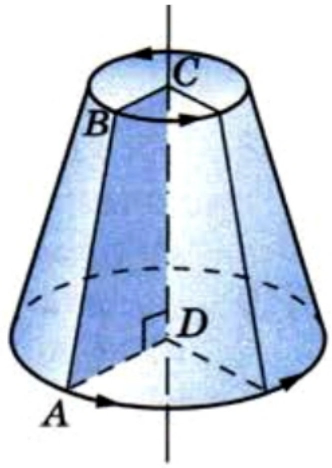
Определение

Часть конической поверхности, ограничивающая усечённый конус, называется **боковой поверхностью усечённого конуса.**

Определение

Отрезки образующих, заключённые между основаниями, называются **образующими усечённого конуса.** Отмечу, что все образующие усечённого конуса равны друг другу.

Усечённый конус можно получить ещё одним способом - вращением прямоугольной трапеции вокруг той боковой стороны, которая перпендикулярна основанию.



Тогда эта сторона (вокруг которой происходит вращение) будет совпадать с осью конуса и будет его высотой, другая боковая сторона станет образующей и при вращении будет образовывать боковую поверхность, а основания трапеции станут соответственно радиусами верхнего и нижнего оснований усечённого конуса.

5. Формула для вычисления площадей поверхностей усеченного конуса

$S_{бок.пов.ук}=\pi(r+R)L$

$S_{.полн.пов.ук}=\pi(rL+RL+r^2+R^2)$

Примеры и разбор решения заданий

1. Найти высоту конуса, если площадь его осевого сечения равна 6, а площадь основания равна 8.

Решение:

Сделаем чертеж:

$S_{ABC}=6$.

Его высота SO является высотой конуса.

$S_{ABC}=SO\cdot OB$.

OB - радиус основания.

Его найдем из равенства: $S_{осн}=\pi R^2$.

$8=\pi R^2$.

$R=\sqrt{\frac{8}{\pi}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=OB$.

Теперь найдем высоту:

$6=SO\cdot OB=SO\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$.

Отсюда: $SO=3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Ответ: $3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. Прямоугольная трапеция с основаниями 4 и 7 и меньшей боковой стороной 4 вращается вокруг меньшей стороны. Найдите элементы усеченного конуса.

Величина
Высота конуса
Образующая конуса
Радиус меньшего основания
Радиус большего основания
Площадь боковой поверхности конуса
Площадь осевого сечения
Площадь полной поверхности конуса

Решение:

Сделаем чертеж:

Трапеция ABCD вращается вокруг стороны AD.

Тогда:

AD – высота усеченного конуса, AD=4.

AB – радиус меньшего основания, AB=4.

DC – радиус большего основания, DC=7.

Площадь боковой поверхности конуса вычислим по формуле: $S_{бок.пов.ук}=\pi(r+R)L$.

Для того чтобы найти площадь боковой поверхности, нужно найти образующую.

Ее найдем из треугольника BHC: BC=5 (это египетский треугольник).

Теперь найдем площадь боковой поверхности.

$S_{б.п.}=\pi(4+7)\cdot 5=55\pi$.

Площадь боковой поверхности равна 55π.

Осевое сечение представляет собой равнобедренную трапецию с основаниями 8 и 14 и высотой, равной 4.

Так что площадь этой трапеции равна: S=4(4+7)=44.

Для того чтобы найти площадь полной поверхности, нужно к площади боковой поверхности прибавить площади ее оснований.

$S_{п.п.}=55\pi+16\pi+49\pi=120\pi$.

Величина	**Значение**
Высота конуса	4
Образующая конуса	5
Радиус меньшего основания	4
Радиус большего основания	7
Площадь боковой поверхности конуса	55π
Площадь осевого сечения	44
Площадь полной поверхности конуса	120π

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.

2. Просмотрите материал по ссылке:
https://resh.edu.ru/subject/lesson/4903/main/22650/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке:
https://resh.edu.ru/subject/lesson/4903/train/22654/

Задачи.

346 Высота конуса равна 15 см, а радиус основания равен 8 см. Найдите образующую конуса.

347 Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь основания конуса, если: а) $\alpha = 30°$; б) $\alpha = 45°$; в) $\alpha = 60°$.

348 Высота конуса равна 8 дм. На каком расстоянии от вершины конуса надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна: а) половине площади основания; б) четверти площади основания?

349 Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник. Найдите площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен 5 см.

350 Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной $2r$. Найдите площадь сечения, проведённого через две образующие конуса, угол между которыми равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

351 Высота конуса равна h, а угол между высотой и образующей конуса равен 60°. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две взаимно перпендикулярные образующие.

352 Найдите высоту конуса, если площадь его осевого сечения равна 6 $дм^2$, а площадь основания равна 8 $дм^2$.

353 Образующая конуса равна l, а радиус основания равен r. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу: а) в 60°; б) в 90°.

354 Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 60°, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

357 Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор с дугой α. Найдите α, если высота конуса равна 4 см, а радиус основания равен 3 см.

358 Найдите дугу сектора, представляющего собой развёртку боковой поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 60°.

359 Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если развёрткой его боковой поверхности является сектор с дугой, равной: а) 180°; б) 90°; в) 60°.

360 Вычислите площадь основания и высоту конуса, если развёрткой его боковой поверхности является сектор, радиус которого равен 9 см, а дуга равна 120°.

361 Угол между образующей и осью конуса равен 45°, образующая равна 6,5 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

362 Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 $см^2$. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

363 Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна a, а противолежащий угол равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

364 Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении конуса.

365 Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна m, а угол при основании равен φ, вращается вокруг основания. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольника.

366 Найдите образующую усечённого конуса, если радиусы оснований равны 3 см и 6 см, а высота равна 4 см.

367 Радиусы оснований усечённого конуса равны 5 см и 11 см, а образующая равна 10 см. Найдите: а) высоту усечённого конуса; б) площадь осевого сечения.

368 Радиусы оснований усечённого конуса равны R и r, где $R>r$, а образующая составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите площадь осевого сечения.

369 Площадь боковой поверхности конуса равна 80 см^2. Через середину высоты конуса проведена плоскость, перпендикулярная к высоте. Найдите площадь боковой поверхности образовавшегося при этом усечённого конуса.

370 Дана трапеция $ABCD$, в которой $\angle A=90°$, $\angle D=45°$, $BC=4$ см, $CD=3\sqrt{2}$ см. Вычислите площади боковой и полной поверхностей усечённого конуса, образованного вращением данной трапеции вокруг стороны AB.

371 Ведро имеет форму усечённого конуса, радиусы оснований которого равны 15 см и 10 см, а образующая равна 30 см. Сколько килограммов краски нужно взять для того, чтобы покрасить с обеих сторон 100 таких вёдер, если на 1 м^2 требуется 150 г краски? (Толщину стенок вёдер в расчёт не принимать.)

Контрольные вопросы;

1. Что такое коническая поверхность? Образующая конической поверхности?
2. Что такое конус, основание конуса, вершина конуса, образующие конуса, ось конуса, высота конуса?
3. Что такое боковая поверхность конуса, полная поверхность конуса?
4. Какие могут быть сечения?
5. Что такое усечённый конус? Какие элементы усеченного конуса вы знаете?
6. Как вычислить площади поверхностей усеченного конуса?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Сфера и шар.

Цель практического занятия

1. Ввести понятия сферы, шара и их элементов.
2. Вывести уравнение сферы в заданной прямоугольной системе координат.
3. Исследовать взаимное расположение сферы и плоскости.
4. Развить логическое мышление, пространственное воображение.
5. Умение сравнивать, проводить аналогию.
6. Интерес к предмету.
7. Творческие способности учащихся.

Методический материал

1. Что такое сфера, какие у неё есть элементы (центр, радиус, диаметр сферы).
2. Что такое шар и его элементы.
3. Уравнение сферы.
4. Формула для нахождения площади поверхности сферы.
5. Взаимное расположение сферы и плоскости.
6. Теорема о радиусе сферы, который проведён в точку касания и теорему обратную данной.

1. Основные теоретические факты

По аналогии с окружностью сферу рассматривают как множество всех точек равноудалённых от заданной точки, но только всех точек не плоскости, а пространства.

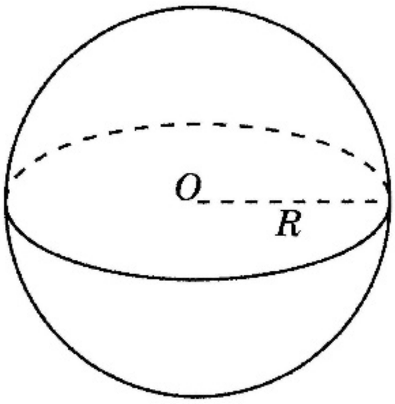


Рисунок 1 – Сфера с центром в точке O и радиусом R

Данная точка O называется **центром** сферы, а заданное расстояние – **радиусом** сферы (обозначается R). Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр, называется **диаметром** (обозначается D). D=2R.

Определение

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, которую называют **центром**.

Определение

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром.**

Шар можно описать и иначе. **Шаром** радиуса R с центром в точке O называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая O), и не содержит других точек.

Сферу можно получить ещё одним способом - вращением полуокружности вокруг её диаметра, а шар – вращением полукруга вокруг его диаметра.

2. Уравнение сферы

Прежде чем вывести уравнение сферы введем понятие уравнения поверхности в пространстве. Для этого рассмотрим прямоугольную систему координат Oxyz и некоторую поверхность F. Уравнение с тремя переменными x, y, z называется уравнением поверхности F, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности F и не удовлетворяют координаты никакой другой точки.

Пусть сфера имеет центром точку C $(x_0; y_0; z_0)$ и радиус R. Расстояние от любой точки M (x; y; z) до точки C вычисляется по формуле:

MC= $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

Исходя из понятия уравнения поверхности, следует, что если точка M лежит на данной сфере, то MC=R, или $MC^2=R^2$, то есть координаты точки M удовлетворяют уравнению:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 .$$

Это выражение называют уравнением сферы радиуса R и центром $C(x_0; y_0; z_0)$.

3. Взаимное расположение сферы и плоскости

Взаимное расположение сферы и плоскости зависит от соотношения между радиусом сферы R и расстояния от центра сферы до плоскости d.

1. Пусть $d < R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, тогда сфера и плоскость пересекаются, и сечение сферы плоскостью есть окружность.

2. Пусть d=R. Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы тогда сфера и плоскость имеют только одну общую точку, и в этом случае говорят, что плоскость касается сферы.

3. Пусть $d > R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

Рассмотрим случай касания более подробно.

Определение

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка – точкой касания.

Теорема (свойство касательной плоскости).

Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Теорема (признак касательной плоскости):

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащей на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

4. Основные формулы

Соотношение между радиусом сферы, радиусом сечения и расстоянием от центра сферы до плоскости сечения:

$$R^2 = h^2 + r^2$$

Формула для вычисления площади поверхности сферы и ее элементов:

$S=4\pi R^2$ – площадь сферы.

$S = 2\pi Rh$ – площадь поверхности сегмента сферы радиуса R с высотой h.

$S = \pi Rh(2h + \sqrt{2hR - h^2}$ – площадь поверхности сектора с высотой h.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

1. Площадь сечения шара, проходящего через его центр, равна 9 кв. м. Найдите площадь поверхности шара.

Решение:

Площадь круга вычисляется по формуле: $S_{кр}=\pi R^2$.

Площадь поверхности шара вычисляется по формуле: $S_{сф}=4\pi R^2$. Радиус шара и радиуса сечения, проходящего через центр шара, одинаковые. Поэтому площадь поверхности шара в 4 раза больше площади его диаметрального сечения. То есть площадь поверхности шара равна 36.

Ответ: 36

2. Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5.

Решение:

Площадь сферы равна $S_{сф}=4\pi R^2$. То есть $S_{сф}=100\pi$.

По условию площадь круга некоторого радиуса r также равна 100π. Значит, $r^2 =100$, то есть $r=10$.

Ответ: 10.

3. Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если AB=13, BC=14, CA=15

Решение:

Окружность, вписанная в треугольник, является сечением сферы.

Найдем ее радиус.

Площадь треугольника с известными сторонами можно вычислить по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p=0,5(AB+BC+AC)=21

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 3 \cdot 4$$

S=84.

С другой стороны, S=p·r.

Отсюда r=4.

Теперь найдем расстояние от центра шара до секущей плоскости.

Используем соотношение:

$$R^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = R^2 - r^2$$

$$h^2 = 25 - 16 = 9$$

h=3.

Ответ: 3.

4. Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10. Найти расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16.

Решение:

Так как вершины прямоугольника лежат на сфере, то окружность, описанная около прямоугольника, является сечением сферы.

Радиус окружности, описанной около прямоугольника, равен половине его диагонали, то есть r=8.

По условию задачи R=10.

Используем соотношение:

$$R^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = R^2 - r^2$$

$$h^2 = 100 - 64 = 36$$

h=6.

Ответ: 6.

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.

2. Просмотрите материал по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4034/main/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке: https://resh.edu.ru/subject/lesson/4034/train/22799/

Задачи.

372 Точки A и B лежат на сфере с центром $O \notin AB$, а точка M лежит на отрезке AB. Докажите, что: а) если M — середина отрезка AB, то $OM \perp AB$; б) если $OM \perp AB$, то M — середина отрезка AB.

373 Точка M — середина отрезка AB, концы которого лежат на сфере радиуса R с центром O. Найдите: а) OM, если $R = 50$ см, $AB = 40$ см; б) OM, если $R = 15$ мм, $AB = 18$ мм; в) AB, если $R = 10$ дм, $OM = 60$ см; г) AM, если $R = a$, $OM = b$.

374 Точки A и B лежат на сфере радиуса R. Найдите расстояние от центра сферы до прямой AB, если $AB = m$.

375 Шар радиуса 41 дм пересечён плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра шара. Найдите площадь сечения.

376 Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см.

377 Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16 см.

378 Стороны треугольника касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его стороны равны 10 см, 10 см и 12 см.

379 Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $CA = 15$ см.

380 Все стороны ромба, диагонали которого равны 15 см и 20 см, касаются сферы радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

381 Отрезок OH — высота тетраэдра $OABC$. Выясните взаимное расположение сферы радиуса R с центром O и плоскости ABC, если: а) $R = 6$ дм, $OH = 60$ см; б) $R = 3$ м, $OH = 95$ см; в) $R = 5$ дм, $OH = 45$ см; г) $R = 3{,}5$ дм, $OH = 40$ см.

382 Расстояние от центра шара радиуса R до секущей плоскости равно d. Вычислите: а) площадь S сечения, если $R = 12$ см, $d = 8$ см; б) R, если площадь сечения равна 12 см^2, $d = 2$ см.

383 Через точку, делящую радиус сферы пополам, проведена секущая плоскость, перпендикулярная к этому радиусу. Радиус сферы равен R. Найдите: а) радиус получившегося сечения; б) площадь боковой поверхности конуса, вершиной которого является центр сферы, а основанием — полученное сечение.

384 Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса R так, что угол между диаметром и плоскостью равен α. Найдите длину окружности, получившейся в сечении, если: а) $R = 2$ см, $\alpha = 30°$; б) $R = 5$ м, $\alpha = 45°$.

386 Сфера касается граней двугранного угла в 120°. Найдите радиус сферы и расстояние между точками касания, если расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно a.

387 Радиус сферы равен 112 см. Точка, лежащая на плоскости, касательной к сфере, удалена от точки касания на 15 см. Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки сферы.

388 Найдите площадь сферы, радиус которой равен: а) 6 см; б) 2 дм; в) $\sqrt{2}$ м; г) $2\sqrt{3}$ см.

389 Площадь сечения сферы, проходящего через её центр, равна 9 м^2. Найдите площадь сферы.

390 Площадь сферы равна 324 см^2. Найдите радиус сферы.

391 Докажите, что площади двух сфер пропорциональны квадратам их радиусов.

392 Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5 м.

393 Радиусы двух параллельных сечений сферы равны 9 см и 12 см. Расстояние между секущими плоскостями равно 3 см. Найдите площадь сферы.

394 Радиусы сечений сферы двумя взаимно перпендикулярными плоскостями равны r_1 и r_2. Найдите площадь сферы, если сечения имеют единственную общую точку.

395 Докажите, что площадь полной поверхности цилиндра, полученного при вращении квадрата вокруг одной из его сторон, равна площади сферы, радиус которой равен стороне квадрата.

Контрольные вопросы:

1.

Точки A и B принадлежат шару. Принадлежит ли этому шару любая точка отрезка AB?

2.

Могут ли все вершины прямоугольного треугольника с катетами 4 см и $2\sqrt{2}$ см лежать на сфере радиуса $\sqrt{5}$ см?

Могут ли две сферы с общим центром и с неравными радиусами иметь общую касательную плоскость?

Что представляет собой множество всех точек пространства, из которых данный отрезок виден под прямым углом?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ
Определение производной. Физический смысл производной. Правила дифференцирования.

Цель практического занятия

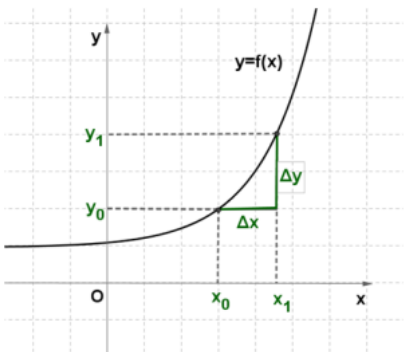
1. Создать условия для осмысленного усвоения учащимися физического смысла производной.
2. Содействовать формированию умений и навыков практического использования производной для решения разнообразных физических задач.
3. Обобщить, систематизировать и закрепить теоретические знания по теме, подчеркнуть роль и практическое значение производной при решении задач по математике и физике.
4. Способствовать развитию математического кругозора, познавательного интереса у учащихся через раскрытие практической необходимости и теоретической значимости темы.
5. Обеспечить условия для совершенствования мыслительных умений учащихся: сравнивать, анализировать, обобщать.
6. Повторить определение производной, изучить правила дифференцирования, закрепить полученные знания на практике.
7. Развивать и совершенствовать умения применять знания в измененной ситуации.

Методический материал

1. Определение производной.
2. Физический смысл производной.
3. Приращение функции.
4. Разбор основных правил дифференцирования функций.
5. Примеры вычисления производной линейной функции.
6. Правила вычисления производных произведения и частного.

Изучая поведение функции $y=f(x)$ около конкретной точки x_0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность x_1-x_0 называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к точке x_1), а разность $f(x_1)-f(x_0)$ называют **приращением функции**.



Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс; Δ — прописная буква греческого алфавита "дельта"; соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, x_1-x_0=Δx, значит, x_1=x_0+Δx.

$f(x_1)$-$f(x_0)$=Δy, значит,

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. (1)

Нельзя истолковывать термин "приращение" как "прирост".

Пример 1.

Найдем приращение Δx и Δf в точке x_0, если $f(x)= x^2$, $x_0=2$ и x=1,9

Решение:

$\Delta x= x_1 - x_0=1{,}9-2=-0{,}1$

$\Delta f= f(1{,}9) - f(2)=1{,}9^2-2^2=-0{,}39$

Ответ: Δx=-0,1; Δf =-0,39

Пример 2.

Найдем приращение Δx и Δf в точке x_0, если $f(x)= x^2$, $x_0=2$ и x=2,1

Решение:

$\Delta x= x_1 - x_0=2{,}1-2=0{,}1$

$\Delta f= f(1{,}9) - f(2)=2{,}1^2-2^2=0{,}41$

Ответ: Δx=0,1; Δf =0,41

Пример 3.

Найдем приращение Δf функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке x_0,если приращение аргумента равно x_0.

Решение:

по формуле (1) находим:

$$\Delta f = f(x0 + \Delta x) - f(x0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} .$$

Ответ: $\Delta f = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$.

С помощью введенных обозначений приращений удобно также выражать среднюю скорость движения за промежуток времени $[t_0; t_0+\Delta t]$. Если точка движется по прямой и известна ее координата x(t), то

$$v_{ср}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Эта формула верна и для Δt<0 (для промежутка $[t_0+\Delta t; t_0]$).

Аналогично выражение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ называют средней скорость изменения функции на промежутке с концами x_0 и $x_0+\Delta x$.

Определение. Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Обозначение: y' или f'(x)

Если функция f(x) имеет производную в точке x, то эта функция называется дифференцируемой в этой точке. Если функция f(x) имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то эта функция дифференцируема на этом промежутке. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Схема вычисления производной функции

1. Найти приращение функции на отрезке [x; x+Δx]:

   Δy=y(x+Δx)-y(x)

1. Разделить приращение функции на приращение аргумента:

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

1. Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

   $$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Пример 4.

Вычислить производную функции $y=x^2$

Решение: Используем схему вычисления производной по действиям:

1. $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)= (x+\Delta x)^2-x^2= x^2+2x\cdot\Delta x+ \Delta x^2-x^2= 2x\cdot\Delta x+ \Delta x^2$
2. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$
3. $y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = (2x + \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x + 0 = 2x$

Ответ: y'=2x.

Физический смысл производной: если положение точки при её движении задаётся функцией пути S(t), где t – время движения, то производная функции S есть мгновенная скорость движения в момент времени t: v(t)=S'(t).

Таким образом, скорость – есть производная от пути по времени.

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости

Теорема 1. Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела конечную производную. **Следствие.** Функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке.

Замечание. Дифференциалом dx независимой переменной будем считать приращение Δx, т.е. dx ≡ Δx.

При вычислении производной используются следующие правила дифференцирования. **Правило дифференцирования суммы** двух функций**.**

Производная суммы равна сумме производных: (f(x) + g(x))' = f '(x) + g'(x).

Подробно это свойство производной формулируется так: Если каждая из функции *f(x)* и g(x) имеет производную, то их сумма также имеет производную и справедлива формула.

Производная суммы нескольких функции равна сумме производных этих функции:

(f(x) +...+ g(x))' = f '(x) +...+ g'(x).

Производная разности равна разности производных: (f(x) - g(x))' = f '(x) - g'(x).

А теперь рассмотрим пример применения данного правила дифференцирования.

Рассмотрим **второе правило** дифференцирования:

Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

(cf(x))'=cf ' (x)
Переходим к **третьему правилу** дифференцирования. Производная произведения равна произведению первого множителя на второй плюс первый множитель, умноженный на производную второго. (f(x)·g(x)) '=f' (x)·g(x)+f(x)·g' (x)

Четвертое правило дифференцирования: производная частного равна производной числителя умноженного на знаменатель минус числитель умноженный на производную знаменателя и все это деленное на квадрат знаменателя.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Сложная функция

Производная сложной функции находится по формуле:

(f(g(x))) '=f '(g(x))·g' (x)

Пример 1.

Найдем производную функции: $f(x) = 2x^2 + 4x$

Решение:

производная суммы равна сумме производных. Найдем производную каждого слагаемого

$$f'(x) = (2x^2 + 4x)' = (2x^2)' + (4x)'$$

$$f'(x) = 4x + 4$$

Ответ: $f'(x) = 4x + 4$

Пример 2.

Найти производную функции $f(x)=8x^3+3x^2-x$.

Решение:

$f(x)=8x^3+3x^2-x$

$f'(x)=(8x^3)'+(3x^2)'-x'$

Рассмотрим каждый член многочлена по отдельности

$(8x^3)'=8(x^3)'=8\cdot 3x^2=24x^2$

$(3x^2)'=3(x^2)'=3\cdot x=6x$

$(-x)'=-(x) = -1$

$f'(x)=(8x^3)'+(3x^2)'-x'=24x^2+6x-1$.

Ответ: $f'(x)=24x^2+6x-1$.

Пример 3.

Найти производную функции $f(x)=(3x-4)(4-5x)$.

Решение:

Воспользуемся формулой производной произведения:

$f'(x)=(3x-4)'(4-5x) + (3x-4)(4-5x)'=3(4-5x)-5(3x-4)=12-15x-15x+20= 32$

Ответ: $f'(x)=32$

Пример 4.

Найти производную функции $f(x)=\frac{3x-2}{x+3}$

Решение:

Воспользуемся формулой производной частного:

$$f'(x)=\frac{(3x-2)'(x+3)-(3x-2)(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{3(x+3)-(3x+2)}{(x+3)^2}=\frac{3x+9-3x-2}{(x+3)^2}=\frac{7}{(x+3)^2}$$

Ответ: $f'(x)=\frac{7}{(x+3)^2}$

Пример 5.

Найти производную функции $F(x)=(2x-1)^2$

Решение:

По правилу нахождения производной от сложной функции, получаем:

$F'(x)=((2x-1)^2)'\cdot(2x-1)=2(2x-1)\cdot 2=4(2x-1)=8x-4$.

Ответ: $F'(x)=8x-4$.

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.
2. Просмотрите материал по ссылке:

https://resh.edu.ru/subject/lesson/4923/main/200984/

https://resh.edu.ru/subject/lesson/3954/main/201015/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке:
https://resh.edu.ru/subject/lesson/4923/train/200988/
https://resh.edu.ru/subject/lesson/3954/train/201019/

Задачи.

776 Точка движется по закону $s(t) = 1 + 3t$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени:
1) от $t = 1$ до $t = 4$; 2) от $t = 0{,}8$ до $t = 1$.

777 Найти среднюю скорость движения точки на отрезке [1; 1,2], если закон её движения $s = s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = 2t$; 2) $s(t) = t^2$.

778 Найти мгновенную скорость движения точки, если:
1) $s(t) = 2t + 1$; 2) $s(t) = 2 - 3t$.

779 Закон движения задан формулой $s(t) = 0{,}25t + 2$. Найти:
1) среднюю скорость движения от $t = 4$ до $t = 8$;
2) скорость движения в моменты $t = 4$ и $t = 8$.

780 Используя определение производной, найти $f'(x)$, если:
1) $f(x) = 3x + 2$; 2) $f(x) = 5x + 7$;
3) $f(x) = 3x^2 - 5x$; 4) $f(x) = -3x^2 + 2$.

781 С помощью формулы $(kx + b)' = k$ найти производную функции:
1) $f(x) = 4x$; 2) $f(x) = -7x + 5$; 3) $f(x) = -5x - 7$.

782 Найти мгновенную скорость движения точки, если закон её движения $s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = \frac{3}{2}t^2$; 2) $s(t) = 5t^2$.

783 Определить скорость тела, движущегося по закону $s(t) = t^2 + 2$, в момент времени:
1) $t = 5$; 2) $t = 10$.

784 Закон движения точки задан графиком зависимости пути s от времени t (рис. 105). Найти среднюю скорость движения точки на отрезках [0; 1], [1; 2], [2; 3].

785 Закон движения точки задан графиком зависимости пути s от времени t (рис. 106). Найти среднюю скорость движения точки на отрезках [0; 2], [2; 3], [3; 3,5].

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение производной.
2. В чем заключается физический смысл производной?
3. Правило дифференцирования суммы функций.
4. Правило дифференцирования произведения функций.
5. Правило дифференцирования частного функций.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Производная степенной функции.
Производные элементарных функций

Цель практического занятия

1. Обобщить и систематизировать знания по теме, умения применять полученные знания при решении задач, находить производную степенной функции, выявить и устранить пробелы в знаниях по данной теме.
2. Содействовать развитию у учащихся мыслительных операций: умения анализировать, синтезировать, сравнивать.

Методический материал

1. Разбор понятия производной степенной функции.
2. Вычисление производной степенной функции.
3. Знакомство с правилами вычисления производных одночлена и многочлена.
4. Определение элементарной функции.
5. Производная показательной функции.
6. Производные тригонометрических функций.
7. Производная логарифмической функции.

Формула для вычисления производной степенной функции x^n, где n – произвольное натуральное число, такова: $\mathbf{(x^n)'=nx^{n-1}}$.

Нам уже известна формула производной функции x^2: $\mathbf{(x^2)'=2x}$.

Пользуясь формулой дифференцирования произведения, получаем:

$(x^3)' = (x^2\cdot x)' = (x^2)'\cdot x + x^2\cdot (x)' = 2x\cdot x+x^2\cdot 1 = 3x^2$;

$(x^4)' = (x^3\cdot x)' = (x^3)'\cdot x+x^3\cdot (x)' = 3x^2\cdot x+x^3\cdot 1 = 4x^3$.

Заметим, что

$(x^2)' = 2x^{2-1}$

$(x^3)' = 3x^{3-1}$

$(x^4)'=4x^{4-1}$

Т.е. для n, равного 2, 3 и 4, формула (1) доказана. Продолжая аналогичные рассуждения, нетрудно убедиться в справедливости формулы (1) для n, равного 5, 6 и т.д.

Пример 1.

Докажем что, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, при $x \neq 0$.

Решение:

1. представим $\frac{1}{x}$ как x^{-1};
2. воспользуемся формулой (1): $(x^{-1})'=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}$;
3. вернемся к первоначальному виду

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

В более сложных случаях, например, при нахождении производной функции $(3x-1)^7$, можно воспользоваться следующей формулой:

$$((kx+b)^p)'=pk(kx+b)^{p-1}$$

Пример

Найдем производную функции $(3x-1)^7$.

Решение:

воспользуемся формулой (2)

$((3x-1)^7)'=21(3x-1)^6$.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1

Вычислить $f'(9)$, если $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Решение:

$$f'(x)=(x^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}};$$

$$f'(9)=-\frac{1}{2}9^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{54}.$$

Пример 2

Доказать, что $(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ на промежутке:

1. $x>0$;
2. $x<0$.

Доказательство:

1. если $x>0$, то $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (1) получаем:

$$(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

1. если $x<0$, то $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{-x}=-(-x)^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (2) получаем:

$$(\sqrt[3]{x})'=(-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot(-1)(-x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Элементарными функциями называют степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации. При решении многих практических задач часто приходится находить производные таких функций.

1.Производная показательной функции.

Показательная функция $f(x)=a^x$, где $a>0$, $a\neq1$, определена на всей числовой прямой и имеет производную в каждой ее точке. Любую показательную функцию можно выразить через показательную функцию с основанием у по формуле:

$a^x = e^{x\ln a}$ (1)

так как $e^{x\ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$.

Стоит отметить свойств о функции e^x: производная данной функции равна ей самой

$(e^x)' = e^x$. (2)

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$(e^{kx+b})' = ke^{kx+b}$. (3)

Производная для a^x:

$(a^x)' = a^x\ln a$. (4)

2.Производная логарифмической функции.

Логарифмическую функцию x с любым основанием a > 0, a≠ 1 можно выразить через логарифмическую функцию с основанием е с помощью формулы перехода

$$x = \frac{ln\, ln\, x}{ln\, ln\, a} \quad (5)$$

Производная функции lnx выражается формулой

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0 \quad (6)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\ln(kx+b))' = \frac{k}{kx+b} \quad (7)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot ln\, a} \quad (8)$$

3.Производные тригонометрических функций.

Для тригонометрических функций справедливы следующие равенства:

$(\sin x)' = \cos x$ (9)

$(\cos x)' = -\sin x$ (10)

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Найти производную:

1. f(x) = 3lnx

Решение: $(3\ln x)' = \frac{3}{x}$

Ответ: $\frac{3}{x}$

1. $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$

Решение: $(3e^{2x})' = 3 \cdot 2 \cdot e^{2x} = 6 \cdot e^{2x}$

Ответ: $6 \cdot e^{2x}$

1. $f(x) = 2^x$

Решение: $(2^x)' = 2^x \ln 2$

Ответ: $2^x \ln 2$

1. $f(x) = \frac{ln\, ln\, 3x}{x+1}$

Решение: $\left(\frac{ln\, ln\, 3x}{x+1}\right)' = \frac{\frac{3}{3x}(x+1) - ln\, ln\, 3x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x\, ln\, ln\, 3x}{x(x+1)^2}$

Ответ: $\frac{x+1-x\, ln\, ln\, 3x}{x(x+1)^2}$

1. $f(x) = \sin(2x+1) - 3\cos(1-x)$

Решение: $(\sin(2x+1) - 3\cos(1-x))' = 2\cos(2x+1) - 3\sin(1-x)$

Ответ: $2\cos(2x+1) - 3\sin(1-x)$

Практическая часть

1. Выучите определения и теоремы.
2. Просмотрите материал по ссылке:
3. https://resh.edu.ru/subject/lesson/4922/main/201046/
https://resh.edu.ru/subject/lesson/6114/main/201077/

3. Выполните тренировочные задания по ссылке:
https://resh.edu.ru/subject/lesson/4922/train/201050/
https://resh.edu.ru/subject/lesson/6114/train/201081/

Задачи.

Найти производную функции (787—792).

787 1) x^6; 2) x^7; 3) x^{11}; 4) x^{13}.

788 1) x^{-2}; 2) x^{-3}; 3) x^{-4}; 4) x^{-7}.

789 1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{2}{3}}$; 3) $x^{-\frac{2}{7}}$; 4) $x^{\sqrt{3}}$.

790 1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

791 1) $(4x-3)^2$; 2) $(5x+2)^{-3}$; 3) $(1-2x)^{-6}$;
4) $(2-5x)^4$; 5) $(2x)^3$; 6) $(-5x)^4$.

792 1) $\sqrt[3]{2x+7}$; 2) $\sqrt[4]{7-3x}$; 3) $\sqrt[4]{3x}$; 4) $\sqrt[3]{5x}$.

793 Найти $f'(x_0)$, если:

1) $f(x) = x^6$, $x_0 = \frac{1}{2}$;
2) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = 3$;
3) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;
4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$;
5) $f(x) = \sqrt{5-4x}$, $x_0 = 1$;
6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$, $x_0 = 1$.

794 Построить график функции $y = x^4$ и график функции, являющейся её производной.

795 На рисунке 107 изображён график функции, являющейся производной одной из функций $y = x^2$, $y = x^3$ или $y = x^{\frac{1}{2}}$. Установить функцию.

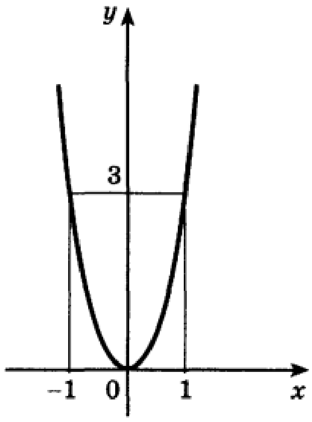


Рис. 107

796 Найти производную функции:

1) $\frac{1}{(2+3x)^2}$;
2) $\frac{1}{(3-2x)^3}$;
3) $\sqrt[3]{(3x-2)^2}$;
4) $\sqrt[7]{(3-14x)^2}$;
5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}$;
6) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

797 При каких значениях x производная функции $f(x)$ равна 1, если:

1) $f(x) = x^3$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$?

798 Найти мгновенную скорость тела, движущегося по закону $s(t) = \sqrt{t+1}$, в момент времени $t = 3$.

799 При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = f(x)$, если:

1) $f(x) = (2x-1)^2$;
2) $f(x) = (3x+2)^3$?

798 Найти мгновенную скорость тела, движущегося по закону $s(t) = \sqrt{t+1}$, в момент времени $t = 3$.

799 При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = f(x)$, если:

1) $f(x) = (2x - 1)^2$; 2) $f(x) = (3x + 2)^3$?

800 По данному на рисунке 108 графику квадратичной функции написать формулы, задающие саму функцию и её производную.

801 Найти значения x, при которых значения функции $y = \sqrt{3x - 7}$ равны значениям функции, являющейся её производной.

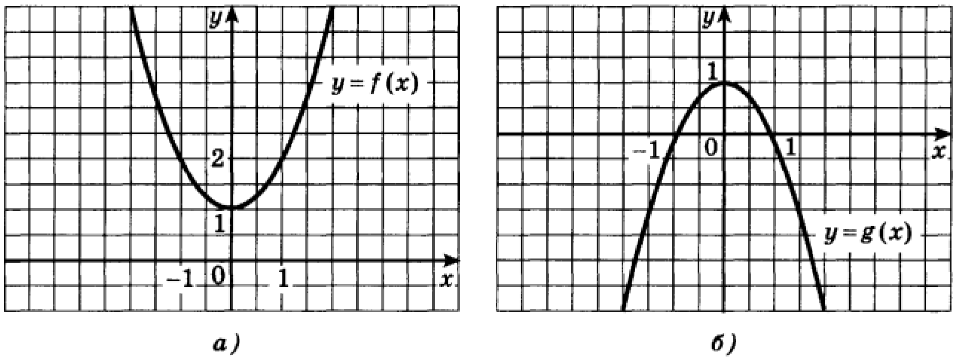


Рис. **108**

Найти производную функции (**802—803**).

802 1) $x^2 + x$; 2) $x^2 - x$; 3) $3x^2$; 4) $-17x^2$;
5) $-4x^3$; 6) $0{,}5x^3$; 7) $13x^2 + 26$; 8) $8x^2 - 16$.

803 1) $3x^2 - 5x + 5$; 2) $5x^2 + 6x - 7$; 3) $x^4 + 2x^2$;
4) $x^5 - 3x^2$; 5) $x^3 + 5x$; 6) $-2x^3 + 18x$;
7) $2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$; 8) $-3x^3 + 2x^2 - x - 5$.

804 Построить график функции $y = 3(x - 2)^2 + 1$ и график функции, являющейся её производной.

805 Найти производную функции:

1) $x^2 + \frac{1}{x^3}$; 2) $x^3 + \frac{1}{x^2}$; 3) $2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x}$.

806 Найти $f'(0)$ и $f'(2)$, если:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; 2) $f(x) = x^3 - 2x$;
3) $f(x) = -x^3 + x^2$; 4) $f(x) = x^2 + x + 1$.

807 Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$;

3) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$; 4) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$.

809 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0, если:

1) $f(x) = x^3 - 2x$;
2) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$;
4) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$;
5) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$;
6) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5$.

810 Найти производную функции:

1) $(x^2 - x)(x^3 + x)$; 2) $(x+2)\sqrt[3]{x}$; 3) $(x-1)\sqrt{x}$.

811 Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = (x-1)^8 (2-x)^7$; 2) $f(x) = (2x-1)^5 (1+x)^4$;

3) $f(x) = \sqrt{2-x}\,(3-2x)^8$; 4) $f(x) = (5x-4)^6 \sqrt{3x-2}$.

812 Пересекается ли график функции, являющейся производной функции $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$, с графиком функции $y = 3x + 1$?

813 При каких значениях x значение производной функции $y = (x-3)^5 (2+5x)^6$ равно 0?

831 1) $e^x + 1$; 2) $e^x + x^2$; 3) $e^{2x} + \frac{1}{x}$; 4) $e^{-3x} + \sqrt{x}$.

832 1) $e^{2x+1} + 2x^3$; 2) $e^{\frac{1}{2}x-1} - \sqrt{x-1}$; 3) $e^{0,3x+2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $e^{1-x} + x^{-3}$; 5) e^{x^2}; 6) e^{2x^3}.

833 1) $2^x + e^x$; 2) $3^x - x^{-2}$; 3) $e^{2x} - x$; 4) $e^{3x} + 2x^2$; 5) 3^{x^2+2}.

834 1) $0,5^x + e^{3x}$; 2) $3^x - e^{2x}$; 3) $e^{2-x} + \sqrt[3]{x}$; 4) $e^{3-x} + \frac{1}{x^4}$.

835 1) $2 \ln x + 3^x$; 2) $3 \ln x - 2^x$; 3) $\log_2 x + \frac{1}{2x}$;

4) $3x^{-3} - \log_3 x$; 5) $\ln(x^2 - 2x)$; 6) $(3x^2 - 2)\log_3 x$.

836 1) $\sin x + x^2$; 2) $\cos x - 1$; 3) $\cos x + e^x$; 4) $\sin x - 2^x$.

837 1) $\sin(2x-1)$; 2) $\cos(x+2)$; 3) $\sin(3-x)$; 4) $\cos(x^3)$.

838 1) $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + e^{3x}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{3} + 3\right) + 2^x$; 3) $3\cos 4x - \frac{1}{2x}$.

839 1) $\frac{\cos x}{e^x}$; 2) $\frac{3^x}{\sin x}$; 3) $\ln x \cdot \cos 3x$; 4) $\log_3 x \cdot \sin 2x$.

840 Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = e^{2x-4} + 2\ln x$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = e^{3x-2} - \ln(3x-1)$, $x_0 = \frac{2}{3}$;

3) $f(x) = 2^x - \log_2 x$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \log_{0,5} x - 3^x$, $x_0 = 1$.

841 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x) = x - \cos x$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$;

3) $f(x) = 2\ln(x+3) - x$; 4) $f(x) = \ln(x+1) - 2x$;

5) $f(x) = x^2 + 2x - 12\ln x$; 6) $f(x) = x^2 - 6x - 8\ln x$.

842 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ положительно:

1) $f(x) = e^x - x$; 2) $f(x) = x\ln 2 - 2^x$;

3) $f(x) = e^x x^2$; 4) $f(x) = e^x\sqrt{x}$.

Найти производную функции (**843—851**).

843 1) $\sqrt{\frac{2x-1}{3}} + \ln\frac{2x+3}{5}$; 2) $\sqrt{\frac{1-x}{6}} - 2\ln\frac{2-5x}{3}$;

3) $2e^{\frac{1-x}{3}} + 3\cos\frac{1-x}{2}$; 4) $3e^{\frac{2-x}{3}} - 2\sin\frac{1+x}{4}$.

Найти производную функции (843—851).

843 1) $\sqrt{\frac{2x-1}{3}}+\ln\frac{2x+3}{5}$; 2) $\sqrt{\frac{1-x}{6}}-2\ln\frac{2-5x}{3}$;

3) $2e^{\frac{1-x}{3}}+3\cos\frac{1-x}{2}$; 4) $3e^{\frac{2-x}{3}}-2\sin\frac{1+x}{4}$.

844 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2-x}}-3\cos\frac{x-2}{3}$; 2) $2\sqrt[4]{\frac{1}{(x+2)^3}}-5e^{\frac{x-4}{5}}$.

845 1) $0{,}5^x\cdot\cos 2x$; 2) $5\sqrt{x}\cdot e^{-x}$; 3) $e^{3-2x}\cdot\cos(3-2x)$.

846 1) $\ln\sqrt{x-1}$; 2) $e^{\sqrt{3+x}}$; 3) $\ln(\cos x)$; 4) $\ln(\sin x)$.

847 1) $2^{\cos x+1}$; 2) $0{,}5^{1+\sin x}$; 3) $\cos\sqrt[3]{x+2}$; 4) $\sin(\ln x)$.

848 1) $\sqrt{x^2+2x-1}$; 2) $\sqrt[3]{\sin x}$; 3) $\sqrt[4]{\cos x}$; 4) $\sqrt{\log_2 x}$.

849 1) $\frac{1+\cos x}{\sin x}$; 2) $\frac{\sqrt{3x}}{3^x+1}$; 3) $\frac{e^{0,5x}}{\cos 2x-5}$; 4) $\frac{5^{2x}}{\sin 3x+7}$.

850 1) $\frac{e^x-e^{-x}}{x}$; 2) $\frac{2^x-\log_2 x}{\ln 2\cdot x}$.

851 1) $\frac{\sin x-\cos x}{x}$; 2) $\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$.

852 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x)=5(\sin x-\cos x)+\sqrt{2}\cos 5x$;

2) $f(x)=1-5\cos 2x+2(\sin x-\cos x)-2x$.

853 Найти значения производной функции $f(x)$ в точках, в которых значение этой функции равно 0:

1) $f(x)=e^{2x}\ln(2x-1)$; 2) $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x}$.

854 Вычислить $f'(x)+f(x)+2$, если $f(x)=x\sin 2x$, $x=\pi$.

855 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x)=x-\ln x$; 2) $f(x)=x\ln x$;

3) $f(x)=x^2\ln x$; 4) $f(x)=x^3-3\ln x$.

856 Найти производную функции $\ln(x^2-5x+6)$ при $x<2$ и при $x>3$.

Контрольные вопросы;

1. Сформулируйте определение производной.
2. В чем заключается физический смысл производной?
3. Правило дифференцирования суммы функций.
4. Правило дифференцирования произведения функций.
5. Правило дифференцирования частного функций.
6. Дайте определение элементарной функции.
7. Чему равна производная показательной функции?
8. Чему равна производная y=cosx?
9. Чему равна производная y=sinx?
10. Чему равна производная y=tgx?
11. Чему равна производная y=ctgx?
12. Чему равна производная логарифмической функции?

Литература

Основная литература

1. Шипачев, В.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. С. Шипачев. − Москва: Издательство Юрайт, 2023. − 212 с. − (Профессиональное образование). − ISBN 978-5-534-04547-5. − Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. − URL: https://urait.ru/bcode/514080 (дата обращения: 03.02.2024).

2. Шипачев, В.С. Математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. − 8-е изд., перераб. и доп. − Москва: Издательство Юрайт, 2023. − 447 с. − (Профессиональное образование). − ISBN 978-5-534-13405-6. − Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. − URL: https://urait.ru/bcode/511549 (дата обращения: 03.02.2024).

3. Баврин, И.И. Математика для технических колледжей и техникумов: учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. − 2-е изд., испр. и доп. − Москва: Издательство Юрайт, 2024. − 397 с. − (Профессиональное образование). − ISBN 978-5-534-08026-1. − Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. − URL: https://urait.ru/bcode/537727 (дата обращения: 09.02.2024).

Дополнительная литература

1. Ельчанинова, Г.Г. Элементы высшей математики. Типовые задания с примерами решений: учебное пособие / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников. − Санкт-Петербург: Лань, 2020. − 92 с. − ISBN 978-5-8114-4670-4. − Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. − URL: https://e.lanbook.com/book/139329 (дата обращения: 03.02.2024). − Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Решение задач по математике. Практикум для студентов средних специальных учебных заведений / В.В. Гарбарук, В.И. Родин, И.М. Соловьева, М.А. Шварц. − 2-е изд., испр. − Санкт-Петербург: Лань, 2023. − 416 с. − ISBN 978-5-507-45993-3. −Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. − URL: https://e.lanbook.com/book/292952 (дата обращения: 03.02.2024). − Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Хорошилова, Е.В.Математический анализ: неопределенный интеграл: учебное пособие для среднего профессионального образования / Е. В. Хорошилова. − 2-е изд., перераб. и доп. − Москва: Издательство Юрайт, 2023. − 187 с. − (Профессиональное образование). − ISBN 978-5-534-06949-5. − Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. − URL: https://urait.ru/bcode/515289 (дата обращения: 04.02.2024).

Перечень используемого программного обеспечения:

1. Microsoft Office.
2. Microsoft Windows.

Перечень используемых профессиональных баз данных и информационных справочных систем:

1. ЭБС Электронного издания ЮРАЙТ.
2. ЭБС «ЛАНЬ».